

## Tema II

# Transformaciones lineales en 3D

Ricardo Ramos

Colaboradores: Luis Jiménez de la Fuente, Alberto Gómez Vicente, Jesús Moisés Peláez Navarro, Emilio González González, Ignacio Coloma González

Antes de comenzar a estudiar el modelado o los métodos de renderizado conviene repasar algunos aspectos fundamentales de los espacios cartesianos tridimensionales, como por ejemplo las transformaciones lineales, pues con frecuencia aparecen a lo largo del temario. Para entender bien la materia que ahora veremos sería interesante desempolvar los conceptos elementales del álgebra vectorial y matricial

### 1.1 Aspectos generales

Antes de comenzar el estudio de las transformaciones lineales en el espacio tridimensional, se han de repasar algunos conceptos básicos en este campo.

#### 1.1.1 Sistemas de referencia

Para la visualización de los objetos, éstos han de quedar ubicados en un **sistema universal de referencia (SUR)**, en el cual el eje  $Z$ , p. ej., puede tener su origen en el plano  $Z$ - (*orientación derecha*), por lo que se dirige hacia el observador (Figura 1-a), o bien tener *orientación izquierda* (Figura 1-b). Todas las coordenadas de los distintos objetos han de estar dadas en uno de estos sistemas de referencia.

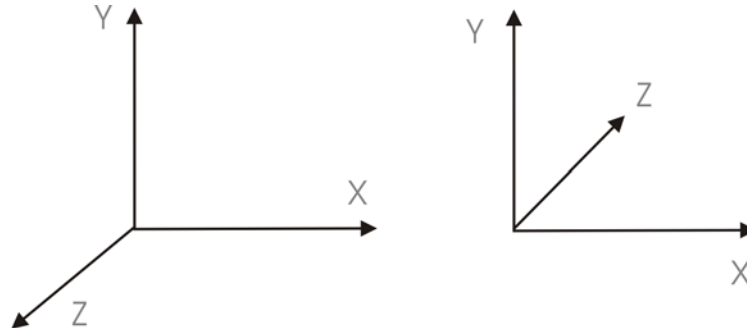


Figura 1: Sistemas de referencia con orientación diferente

### 1.1.2 Transformaciones lineales y matrices

La variación de la posición y/o el tamaño de los objetos, con respecto a los sistemas de referencia, se hace mediante *transformaciones lineales*. Las *transformaciones lineales* que veremos serán las siguientes: **traslación**, **cambio de escala**, **giro**, y **reflexión**.

La *Informática Gráfica* suele utilizar la *notación matricial* para describir las transformaciones lineales de los objetos. La convención más empleada es que el punto (vértice) que se quiere transformar, se exprese mediante un vector horizontal, multiplicado por la *matriz de transformación*. Por ejemplo, en la expresión  $(x', y') = (x, y) \cdot \mathbf{M}$ , la matriz correspondiente a la transformación lineal estaría indicada por  $\mathbf{M}$ ; el punto inicial (antes de la transformación) sería el  $(x, y)$ , y el resultado (o sea, la ubicación del punto en el sistema de referencia después de la transformación lineal) sería el  $(x', y')$ .

Dado que el estudio de las transformaciones lineales sobre modelos poliédricos es más intuitivo, en adelante supondremos que los objetos (modelos) son de este tipo. Así, si un poliedro (objeto) tiene  $n$  vértices, para trasladar, girar, etc. un objeto, se deberá *aplicar la misma transformación lineal a los  $n$  vértices del poliedro*. En general, *se aplicará la transformación a todos los puntos significativos de los objetos*.

### 1.1.3 Sistemas homogéneos

Según lo anterior, siendo  $\mathbf{V} = (x, y)$  el vector de un punto inicial en el SUR-2D,  $\mathbf{T} = (t_x, t_y)$  el vector de translación, y  $\mathbf{V}' = (x', y')$  las coordenadas del punto resultante, ocurre que la translación del punto se ha de realizar calculando

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{T},$$

ya que  $(x', y') = (x, y) + (t_x, t_y)$ , o lo que es igual,  $x' = x + t_x$ , e  $y' = y + t_y$ . Esta manera de operar es extensible a cualquier dimensión.

Por otro lado, si  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{G}$  fuesen las matrices de escalado y giro, respectivamente, ocurriría que

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \text{ y } \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}$$

Vemos entonces que las traslaciones lineales de los puntos en el espacio se efectúan sumando, mientras que los giros y los cambios de escala se consiguen multiplicando. La heterogeneidad de los operadores supone un problema a la hora de generalizar los procesos de las transformaciones, por lo que para evitarlo, normalmente se utilizan **sistemas [de referencia] homogéneos**. Básicamente, un *sistema de coordenadas homogéneo* es el resultante de añadir una dimensión extra a un sistema de referencia dado. Así, en el caso anterior, los vectores homogéneos de los puntos inicial y final estarían dados por

$$\mathbf{V} = (x, y, w), \mathbf{V}' = (x', y', w)$$

Por comodidad y sencillez, normalmente  $w = 1$ .

En definitiva, utilizando un sistema homogéneo, las traslaciones lineales

les de los puntos del plano pueden quedar expresadas como  $\mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$ , si se utiliza la matriz de traslación ( $\mathbf{T}$ ) apropiada. Así, siendo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

es fácil comprobar que  $(x', y', 1) = (x, y, 1) \cdot \mathbf{T}$ .

#### 1.1.4 Composición de matrices

La **composición de matrices** es una de las principales razones para trabajar con sistemas homogéneos. Matemáticamente consiste en la multiplicación de las matrices *en un orden determinado*.

Supongamos que tenemos el punto  $\mathbf{P} = (x, y, z, 1)$  del espacio tridimensional, que como vemos está expresado en un sistema homogéneo. Al hacer

$$\begin{aligned} (x', y', z', 1) &= (x, y, z, 1)\mathbf{T} \\ (x'', y'', z'', 1) &= (x', y', z', 1)\mathbf{G} \end{aligned}$$

lo que se consigue es mover primero el vértice  $\mathbf{P}$ , y luego girarlo. Se puede llegar a un resultado final idéntico, si multiplicamos el vector  $\mathbf{P}$  por la matriz resultante de componer  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{G}$  (en este orden). Así, siendo  $\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}$ , se tiene que

$$(x'', y'', z'', 1) = (x, y, z, 1) \cdot \mathbf{M}$$

El orden en que se multiplican las matrices es importante ya que por lo general, *el producto de matrices no es conmutativo*.

En la composición de matrices pueden intervenir tantos factores (matrices) como se requieran. Así, siendo  $\mathbf{M}_n$  la **matriz compuesta** o **neta** resultante de la composición de las matrices  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{T}_2$ , y  $\mathbf{E}$  (o sea,  $\mathbf{M}_n = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{E}$ ), al multiplicar un punto por esta matriz obtendremos el mismo punto final que hallaríamos multiplicándolo sucesivamente por las matrices que la componen<sup>1</sup>.

En 3D, por lo común, la expresión general de una matriz neta (compuesta) es de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix}$$

donde la submatriz  $\mathbf{A}_{ij}$  representa el cambio de escala y rotación neta, y  $\mathbf{D}_i$  el **vector de desplazamiento neto** de los puntos. Si en la composición de

---

<sup>1</sup>El orden de multiplicación de las matrices en el proceso de composición de la matriz neta se corresponde directamente con el orden de las diferentes acciones a realizar sobre el objeto.

la matriz se incluyen las matrices que gobiernan las proyecciones en perspectiva, el aspecto de la matriz neta sería

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ d_x & d_y & d_z & 1 \end{vmatrix}$$

siendo  $\mathbf{P}_j$  el *vector de perspectiva*.

En general, las transformaciones de vectores homogéneos por medio de este tipo de matrices netas se denominan **transformaciones bilineales**<sup>2</sup>.

## 1.2 Transformaciones lineales tridimensionales

Como ahora veremos, en las transformaciones lineales en el espacio 3D habitualmente se utilizan *sistemas de coordenadas homogéneos*, ya que en la mayoría de los casos es aconsejable la composición matricial.

### 1.2.1 Traslaciones

La translación de un objeto consiste en moverlo cierta distancia, en una dirección determinada.

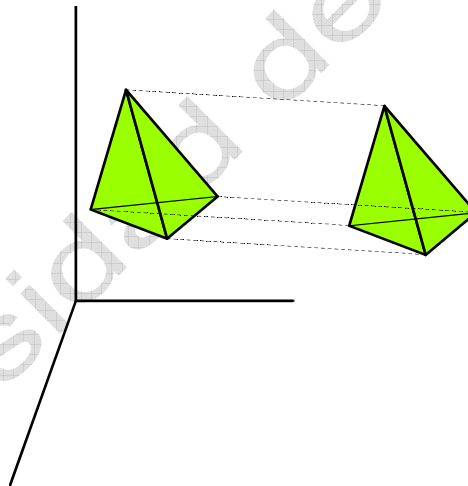


Figura 2: translación de un objeto en el espacio

En 3D, el sistema de referencia homogéneo tendrá 4 dimensiones, por lo que la translación del punto  $\mathbf{V} = (x, y, z, 1)$  quedará indicada como

$$\mathbf{V}' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \cdot \mathbf{T}, \text{ siendo } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix} \text{ la matriz de}$$

**traslación** en 3D.  $(t_x, t_y, t_z)$  se conoce como el *vector de translación*. La expresión anterior es equivalente al sistema de ecuaciones

<sup>2</sup>Resultado de 2 ó más transformaciones lineales sucesivas.

$$\begin{aligned}x' &= x + t_x \\y' &= y + t_y \\z' &= z + t_z \\1 &= 0 + 1\end{aligned}$$

Como se comentó arriba, para trasladar un objeto poliédrico se ha de aplicar la matriz  $\mathbf{T}$  a todos los vértices del objeto. Es importante observar que al hacer la traslación de un objeto sus proporciones no varían, puesto que todos los *puntos significativos* (vértices en el caso de los poliedros) se mueven la misma distancia, en la misma dirección.

Para realizar la traslación inversa a la efectuada mediante la matriz  $\mathbf{T}$ , se ha de aplicar la *matriz inversa*, es decir, la  $\mathbf{T}^{-1}$ , que se obtiene cambiando el signo (multiplicando por  $-1$ ) el *vector de traslación*. Por tanto,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -t_x & -t_y & -t_z & 1 \end{bmatrix}$$

Así,  $\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}^{-1}$ , dado que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1}$ .

### 1.2.2 Cambios de escala en 3D

Dentro de un espacio de referencia los objetos pueden modificar su tamaño relativo en uno, dos, o los tres ejes. Para ello se ha de aplicar la **matriz de escalado**, que viene dada por

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, el cambio de escala del punto  $\mathbf{V} = (x, y, z, 1)$  en el sistema homogéneo quedará indicado por

$$\mathbf{V}' = (x' \quad y' \quad z' \quad 1) = (x \quad y \quad z \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del punto final serán  $x' = xS_x$ ,  $y' = yS_y$ ,  $z' = zS_z$

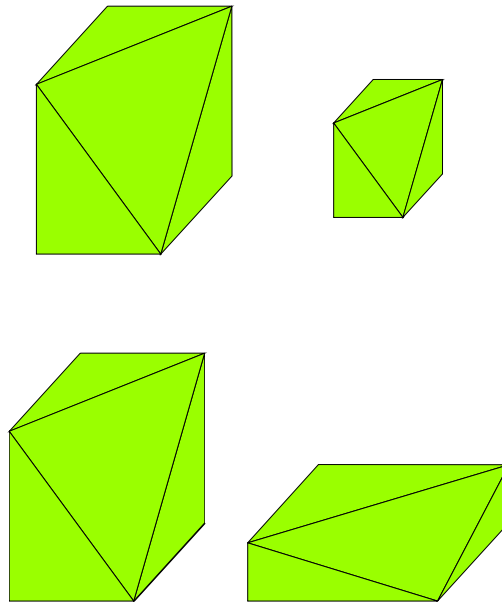


Figura 3: Cambios de escala uniformes y no uniformes

Cuando  $S_x = S_y = S_z$  el cambio de escala es *uniforme*; en cualquier otro caso el cambio de escala será *no uniforme*.

Para obtener el cambio de escala inverso al realizado aplicando la matriz  $\mathbf{S}$ , basta con multiplicar los puntos finales por la matriz inversa de  $\mathbf{S}$ , o sea, por la matriz  $\mathbf{S}^{-1}$ , que se obtiene al sustituir  $S_x, S_y, S_z$  en  $\mathbf{S}$  por  $1/S_x, 1/S_y, 1/S_z$ , respectivamente. Los cambios de escala no uniformes deforman los objetos, por lo que pueden resultar interesantes (siempre que se realicen de manera controlada); por el contrario, el escalado uniforme no deforma los objetos, por lo que suele emplearse con mayor frecuencia.

Si no se toman precauciones, los cambios de escala, además de suponer una variación en las proporciones de los objetos, también *implican una traslación* de los mismos (Figura 4), un efecto colateral no deseado en muchas ocasiones.

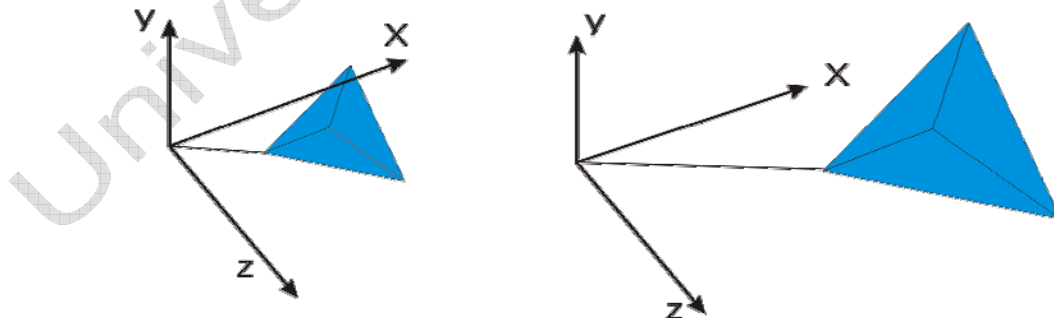


Figura 4: el cambio de escala uniforme lleva asociado implícitamente una traslación

Veamos cómo solucionar este problema, es decir, conseguir que un objeto varíe su tamaño, sin que se desplace en el espacio *con respecto a un punto dado*.

### 1.2.3 Cambio de escala respecto a un punto fijo

Consiste en escalar un objeto, sin que éste se vea afectado por un cambio de posición, respecto a un punto establecido.

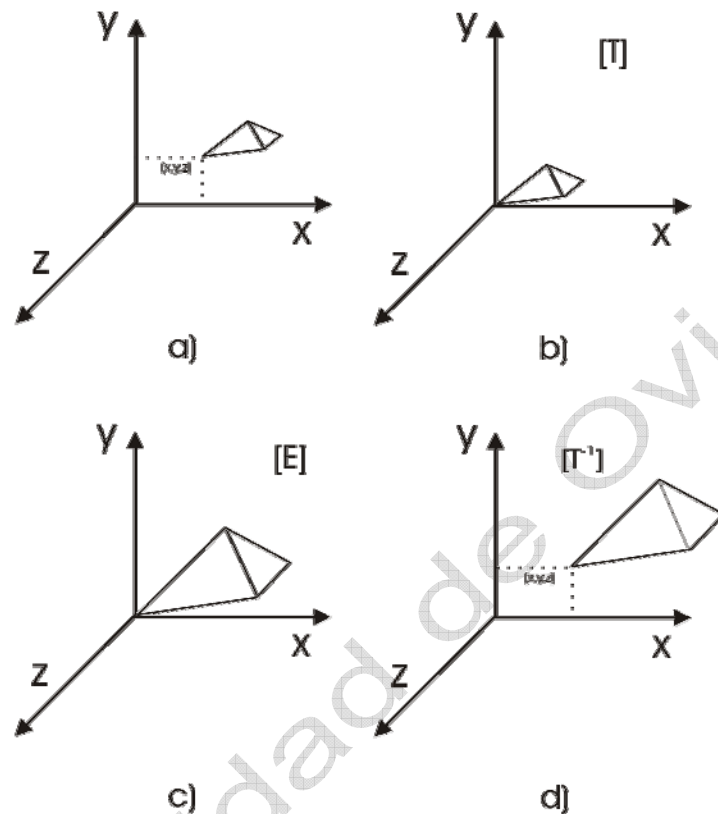


Figura 5: cambio de escala con respecto a un punto fijo

Para ello se ha de realizar una serie de transformaciones lineales básicas, ejecutadas en la secuencia siguiente:

- Tras establecer el *punto fijo* (que normalmente es un vértice, o el centro geométrico del modelo), primero se trasladan hacia el origen de coordenadas todos los puntos significativos del modelo (vértices), utilizando como *vector de traslación* las coordenadas del punto fijo (Figura 5-a). Esta operación se realiza multiplicando todos los vértices por la matriz de traslación  $T$  (Figura 5-b).
- A continuación, se realiza el cambio de escala correspondiente aplicando la matriz de escalado  $(E)$ , como muestra la Figura 5-c.
- Por último, se deshace la traslación inicial de todos los vértices del modelo, utilizando de nuevo las coordenadas del *punto fijo* como vector de traslación del modelo ya escalado. Para ello se han de multiplicar todos los vértices por la matriz inversa de  $T$  (Figura 5-d).

Con el primer paso lo que se consigue es poner el punto fijo  $(x, y, z)$  en

el origen (0,0,0), que al ser neutro con respecto a la multiplicación, no se ve afectado por el cambio de escala, algo que no sucede con los restantes vértices del objeto. Por tanto, al finalizar la serie de transformaciones anterior, el punto fijo tendrá la misma ubicación espacial de partida, por lo que el modelo no se habrá movido con respecto a dicho punto.

Puesto que esta forma de escalar utiliza una secuencia de transformaciones en un orden determinado, es susceptible de ser implantada mediante una *matriz compuesta* (neta). Ya conocemos las matrices que intervienen, por lo que directamente diremos que la matriz neta capaz de escalar los modelos con respecto a un punto fijo viene dada por  $\mathbf{E}_f = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{-1}$ , es decir,

$$\begin{vmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ -xs_x + x & -ys_y + y & -zs_z + z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x & -y & -z & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}$$

### 1.2.4 Giros en 3D

Para realizar el giro de los objetos en 3D, el usuario ha de establecer un *eje de rotación*, así como el **ángulo** y el **sentido de giro** alrededor de dicho eje. Según sea la naturaleza del ángulo, los giros podrán ser **relativos**, o bien **absolutos**. Así, cuando se deba girar el objeto un ángulo  $\phi$  sobre un eje dado, *partiendo de la posición actual del objeto*, el giro será *relativo*. En cambio, si el objeto se ha de girar un ángulo  $\Phi$  *a partir del estado cero* (sistema de referencia del objeto (**SRO**) alineado con el SUR), entonces se trataría de un *giro absoluto*.

Por otro lado, los giros en 3D normalmente se realizan aprovechando la base trigonométrica de las rotaciones en 2D, es decir, descomponiendo los giros 3D en sus componentes ortogonales. Por esta razón, primero recordaremos cómo se realizan los giros en 2D.

#### A) Giros en 2D

Puesto que se ha de establecer el *sentido de giro*, vamos a suponer que el giro alrededor de un eje ortogonal será *positivo*, cuando sea contrario al sentido de giro de las agujas del reloj, mirando cada eje de coordenadas desde fuera hacia el origen.

Así, la Figura 6 muestra un giro positivo alrededor del eje Z de un punto (P) situado inicialmente en las coordenadas (X, Y, Z), y que luego se ha girado un ángulo  $\alpha$ , pasando a estar ahora en las coordenadas (X', Y', Z'). La coordenada Z no varía por lo tanto  $Z' = Z$ .



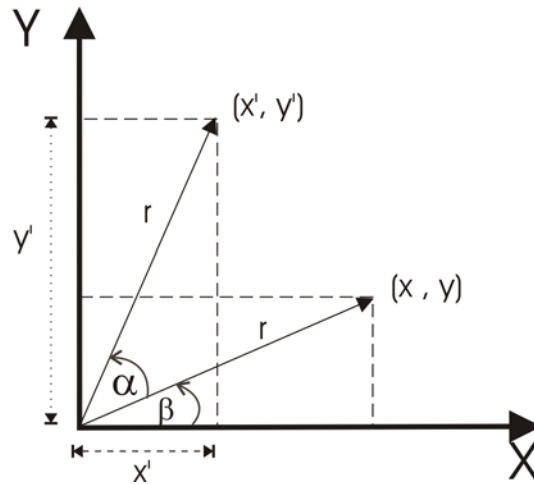


Figura 6: giro de un ángulo  $\alpha$

De la figura anterior se deducen las fórmulas trigonométricas que proporcionan directamente las coordenadas  $(x', y')$ . Así,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sen(\alpha + \beta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \sen(\alpha + \beta)$$

Puesto que aparece el  $\sen$  y  $\cos$  de la suma de dos ángulos podemos escribir

$$x' = r[\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sen(\alpha) \cdot \sen(\beta)] = r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sen(\alpha) \cdot \sen(\beta)$$

$$y' = r[\sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sen(\beta)] = r \cdot \sen(\alpha) \cdot \cos(\beta) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sen(\beta)$$

Además, podemos ver en la Figura 6 que  $x = r \cdot \cos(\beta)$ ,  $y = r \cdot \sen(\beta)$ , por lo que sustituyendo estas igualdades en las expresiones anteriores finalmente queda

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sen(\alpha)$$

$$y' = x \cdot \sen(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$

$$z' = z \text{ (coordenada que no varía)}$$

Expresando estas tres ecuaciones en un sistema de coordenadas homogéneo queda  $P' = P \cdot G_z$ , siendo  $P = (x, y, z, 1)$ ,  $P' = (x', y', z', 1)$ , y

$$G_z = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sen(\alpha) & 0 & 0 \\ -\sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\alpha$  es ángulo de giro alrededor del eje Z.

De la misma manera se derivan las matrices de giro alrededor del eje X e Y, siendo éstas

$$\mathbf{G}_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{G}_y = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Al girar con  $\mathbf{G}_x$ , la coordenada permanece constante en X; de igual modo, utilizando  $\mathbf{G}_y$  el giro no varía en Y.

Para deshacer una rotación, se ha de girar el punto un ángulo  $-\alpha$ . La matriz de giro inversa es la misma, pero con el ángulo cambiado de signo. Otra forma rápida de obtener  $\mathbf{G}^{-1}$  es encontrando la *matriz traspuesta* de  $\mathbf{G}$  (intercambiando filas por columnas), es decir,  $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^T$ .

### B) Giros relativos sobre ejes paralelos a los ejes de coordenadas

A la vista de las “herramientas matemáticas” disponibles para realizar los giros, está claro que los más sencillos serán aquellos que se realicen sobre los ejes de coordenadas. Sin embargo, por sí solos este tipo de giros son muy limitados, por lo que es necesario ampliar la gama de giros disponibles.

Un grupo de giros, ligeramente más sofisticado que el anterior, es el formado por aquellos que rotan los objetos alrededor de ejes paralelos a los del sistema de coordenadas.

Para comprender mejor cómo se efectúan estos giros tomaremos como ejemplo la Figura 7, donde se muestra un objeto en un sistema de referencia local  $X', Y', Z'$ , cuyo eje  $X'$  es paralelo al eje X del sistema de coordenadas global. Para girar el objeto entorno a  $X'$  se ha de proceder como sigue:

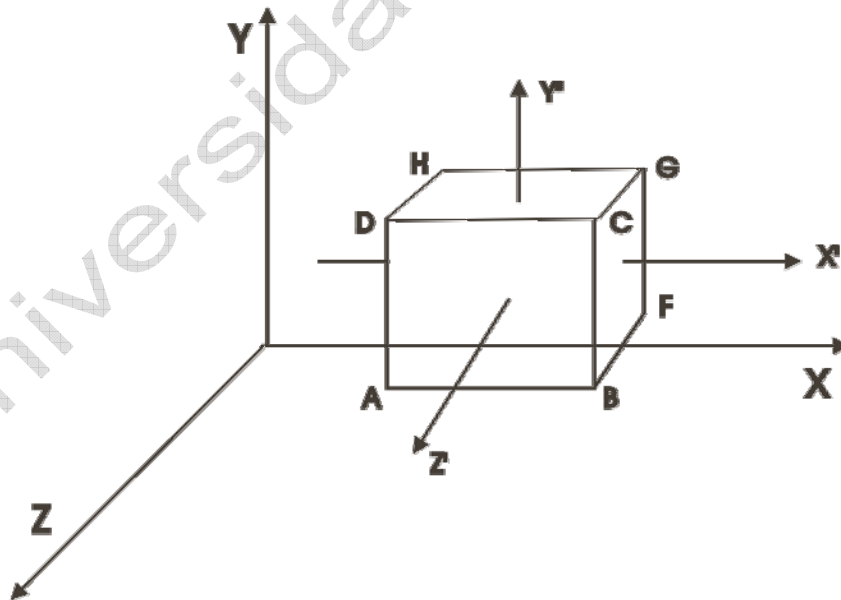


Figura 7: giro alrededor de un eje paralelo a un eje de coordenadas.

- 1) Una vez establecida la ubicación del eje local de giro ( $X'$ ), se ha de trasladar el objeto de forma que el eje de giro quede alineado con el eje global X. Suponiendo que un punto cualquiera del eje  $X'$  tiene las coordenadas globales  $(x_c, y_c, z_c, 1)$ , la matriz que traslada el objeto de modo que el eje  $X'$  quede alineado con el X es

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y_c & -z_c & 1 \end{vmatrix}$$

- 2) A continuación se gira el objeto sobre el eje X un ángulo  $\theta$ , utilizando la matriz de giro correspondiente. Como sabemos, para ello se han de multiplicar todos los puntos significativos del objeto por la matriz, que en este caso es

$$\mathbf{G}_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- 3) Finalmente se ha de trasladar el objeto a su posición original, utilizando la matriz de traslación inversa a la del paso 1), que no es otra que la

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y_c & z_c & 1 \end{vmatrix}$$

El resultado final del giro sobre el eje X' sería algo similar a lo mostrado en esta figura

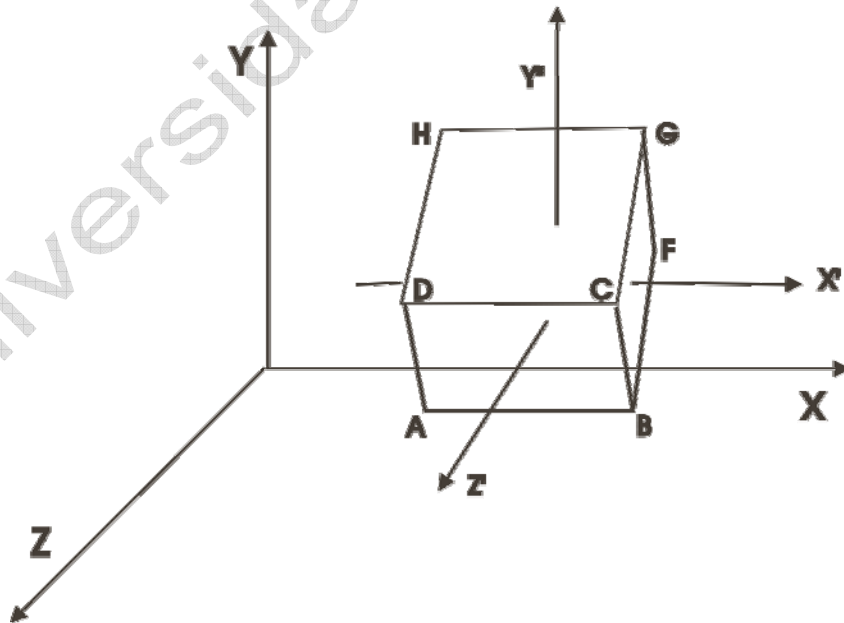


Figura 8: objeto girado alrededor de X'

Como el giro anterior requiere una secuencia de transformaciones lineales simples, el giro neto puede hallarse empleando una matriz compuesta, que se calcula multiplicando las anteriores, siguiendo el orden indicado. Ésta sería igual a

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}_x \cdot \mathbf{T}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & y_c(1 - \cos(\theta)) + z_c \sin(\theta) & z_c(1 - \cos(\theta)) - y_c \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

### 1.2.5 Giros relativos alrededor de un eje cualquiera

Los giros relativos estudiados hasta el momento no son suficientes para las necesidades de un sistema gráfico general, dado que se ha de tener la posibilidad de poder girar los objetos sobre un eje cualquiera.

Puesto que las herramientas matemáticas disponibles solamente son capaces de girar los objetos alrededor de los ejes ortogonales de los sistemas de referencia, para poder girar un objeto sobre un eje cualquiera no queda más remedio que alinear dicho eje con alguno de los ejes ortogonales del SUR.

Una vez establecida la *ubicación y orientación del eje de giro*, así como el *ángulo de giro* ( $\theta$ ), los pasos a seguir son:

- 1) Trasladar el objeto de forma que el eje de giro (del objeto) pase por el origen de coordenadas.
- 2) Girar el objeto de manera que el eje de rotación coincida con alguno de los ejes de coordenadas.
- 3) Realizar el giro indicado ( $\theta$ ).
- 4) Utilizar las matrices de giro inversas, y en orden inverso a como se hizo en el punto 2), para devolver el eje de giro a su orientación original.
- 5) Aplicar la matriz de traslación inversa a la utilizada en el punto 1), para devolver el eje de giro (y el objeto) a su posición original.

Antes de ver en detalle los pasos anteriores, estableceremos que *los giros en el sentido de las agujas del reloj serán negativos*. Además, el eje ortogonal que utilizaremos para girar el objeto será el Z.

#### Definición del eje de giro

El eje de giro queda establecido mediante dos puntos  $\mathbf{P} = (x', y', z')$  y  $\mathbf{Q} = (x'', y'', z'')$ , que definen un vector ( $\mathbf{v}$ ), que será normalizado dando paso al vector  $\mathbf{u}$ .

Así, sea  $\mathbf{v}(x, y, z) = [(x'' - x'), (y'' - y'), (z'' - z')]$ , como muestra la Figura 9. Su módulo será  $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , por lo que el vector normalizado vendrá dado por  $\mathbf{u}(a, b, c) = \left( \frac{x}{|\mathbf{v}|}, \frac{y}{|\mathbf{v}|}, \frac{z}{|\mathbf{v}|} \right)$ .

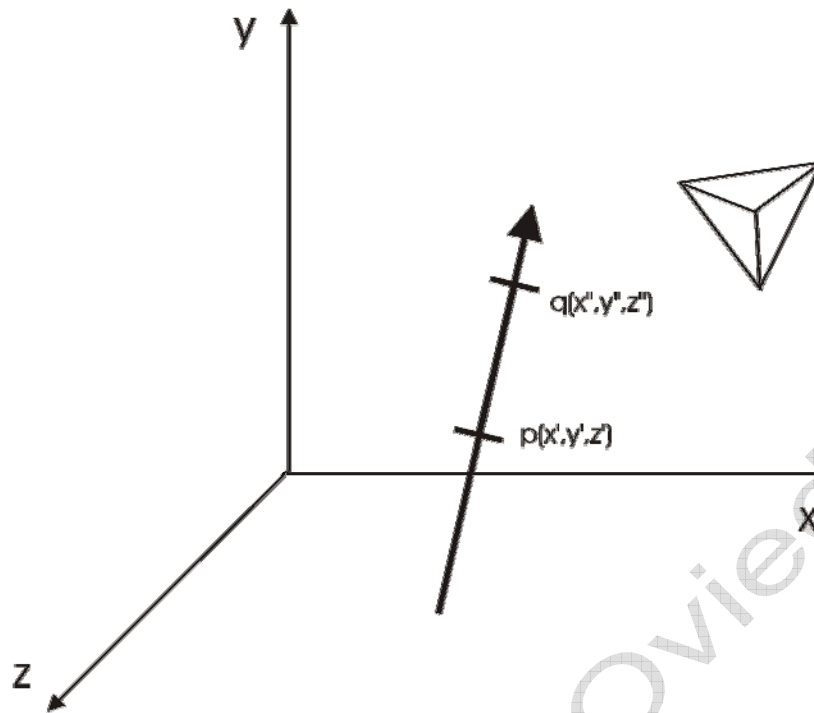


Figura 9: determinación del eje de giro

Ahora que se conoce el eje de giro normalizado ( $\mathbf{u}$ ), veamos paso a paso cómo se lleva a cabo el giro del objeto sobre este eje.

**Pasos a realizar**

- 1) En primer lugar, se ha de utilizar una matriz de traslación sobre el objeto, de modo que el eje de giro pase por el origen de coordenadas (0, 0, 0).

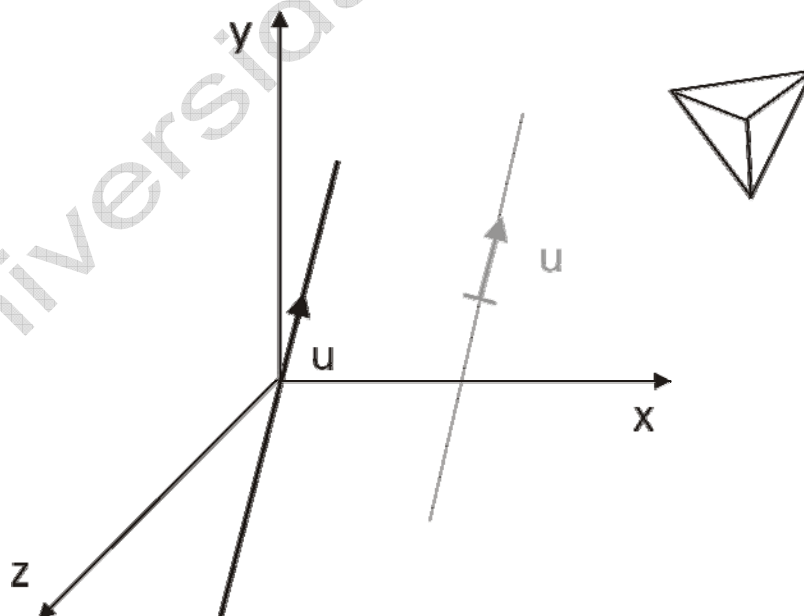


Figura 10: traslación del eje de giro.

En la Figura 9 puede apreciarse que para llevar  $\mathbf{u}$  al origen, el *vector de traslación* ha de ser el  $(-x', -y', -z')$ . En consecuencia, la matriz de traslación a utilizar será la

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x' & -y' & -z' & 1 \end{vmatrix}$$

2) El siguiente paso consiste en situar  $\mathbf{u}$  sobre uno de los ejes de coordenadas, que en este caso será el Z. Esta operación se ha de realizar en dos fases:

- a) Girar  $\mathbf{u}$  alrededor del eje X, hasta el plano XZ.
- b) Girar el vector  $\mathbf{u}$  hasta el eje Z, alrededor del eje Y

Veamos cada uno de estos pasos.

**a) Giro del vector  $\mathbf{u}$  hasta el plano XZ**

Para poder girar  $\mathbf{u}$  hasta XZ (alrededor del eje X), se ha de encontrar la matriz de giro en X ( $\mathbf{G}_x$ ), para lo cual es necesario conocer el ángulo de giro.

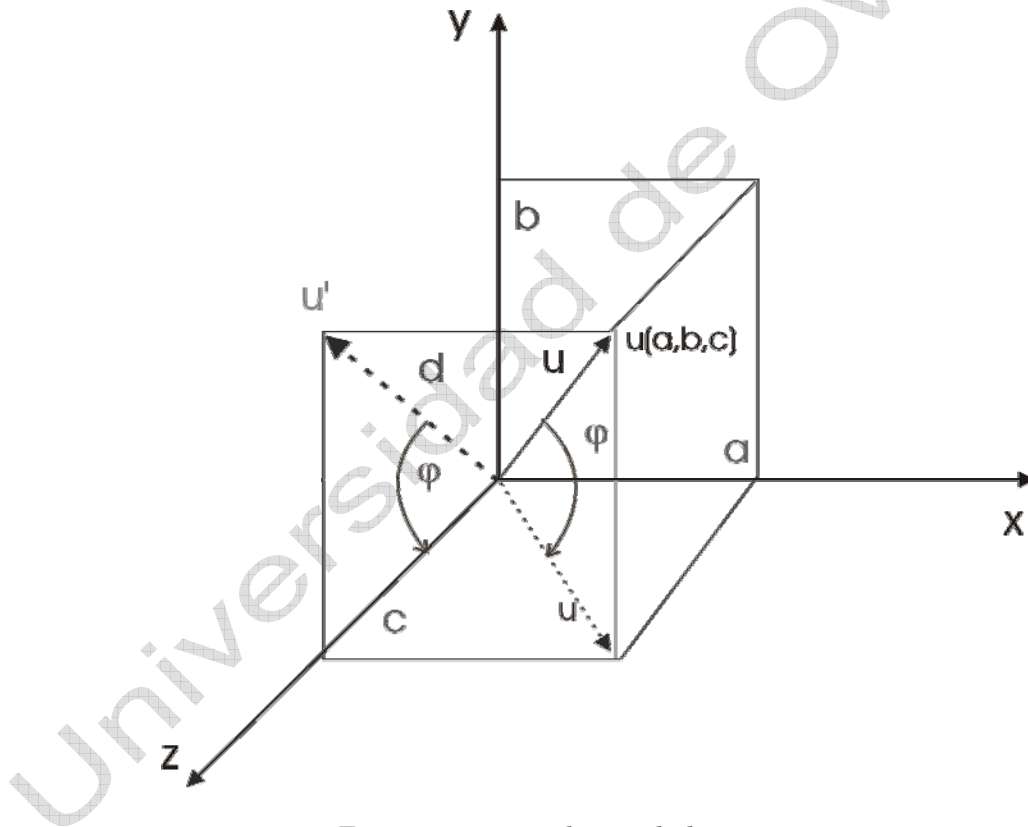


Figura 11: girar  $\mathbf{u}$  hasta el plano xz.

En la figura anterior  $\mathbf{u}'$  es la proyección de  $\mathbf{u}$  sobre el plano YZ, es decir  $\mathbf{u}' = (0, b, c)$ . Puesto que al girar  $\mathbf{u}$  sobre el eje X, se gira el mismo ángulo  $\varphi$  de  $\mathbf{u}'$  hasta el eje Z, se deduce que

$$\cos(\varphi) = \frac{c}{|\mathbf{u}'|} = \frac{c}{d}; \quad \text{sen}(\varphi) = \frac{b}{d}$$

siendo  $|\mathbf{u}'| = d = \sqrt{b^2 + c^2}$ .

Por tanto, la matriz de giro de  $\mathbf{u}$  sobre el eje X con dicho ángulo es

$$\mathbf{G}_x(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{d} & \frac{b}{d} & 0 \\ 0 & \frac{-b}{d} & \frac{c}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tras aplicar esta matriz a  $\mathbf{u}$ , este vector se encontraría sobre el plano XZ.

**b) Giro del vector  $\mathbf{u}$  alrededor del eje Y, hasta el eje Z**

Se trata de un giro negativo, pues el sentido de giro es el mismo que el de las manecillas del reloj; por tanto, este ángulo quedará indicado como  $-\alpha$ .

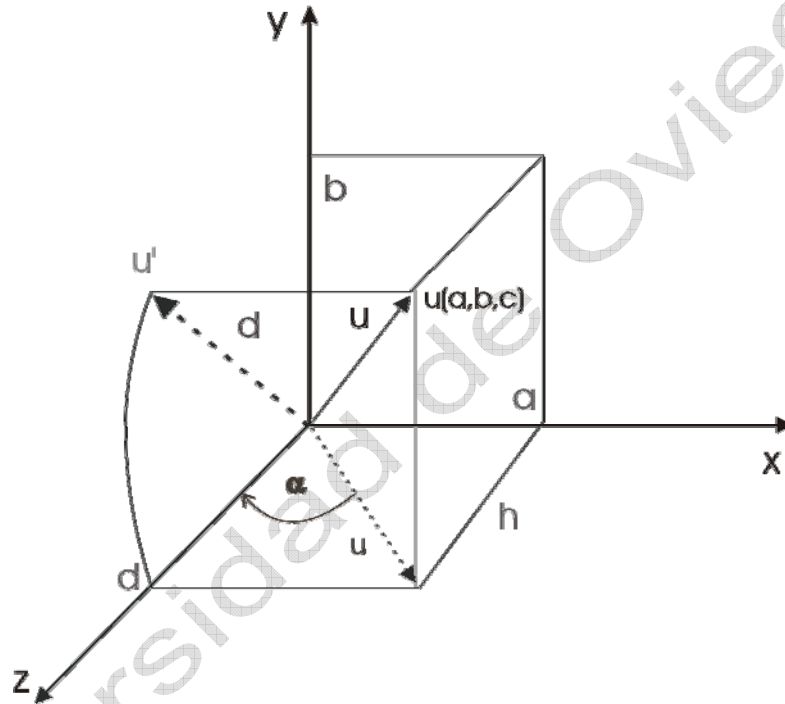


Figura 12: giro de  $\mathbf{u}$  hasta eje Z.

De esta figura se puede deducir que la proyección de  $\mathbf{u}$  (que se encuentra en el plano (XZ) sobre el eje Z es igual  $d = |\mathbf{u}'|$ . En efecto, como en la figura  $a^2 + h^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1$ , y al mismo tiempo  $a^2 + b^2 + c^2 = |\mathbf{u}|^2 = 1$ , resulta que  $b^2 + c^2 = h^2$ , y como en el paso anterior vimos que  $d^2 = b^2 + c^2$ , se llega a la conclusión de que  $d = h$ . Por tanto, se concluye que

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{d}{1} = d; \quad \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha) = -\frac{a}{1} = -a$$

En definitiva, la matriz correspondiente al giro en Y es

$$\mathbf{G}_y(-\alpha) = \begin{vmatrix} d & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

No nos olvidemos que estas matrices se han de aplicar sobre todos los

puntos significativos del objeto que se gira, que en el caso de los poliedros son los vértices.

3) Una vez situado el eje de giro sobre uno de los ejes de coordenadas, (en esta ocasión el eje Z) se realizará sobre dicho eje el giro establecido para el objeto, cuyo ángulo (en este caso) está indicado por  $\theta$ . Por tanto, la matriz de giro en Z será la

$$\mathbf{G}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Hecho el giro alrededor del eje Z, el objeto ya se encuentra girado el ángulo deseado, por lo que debemos volver el eje de giro a su orientación original. Para ello aplicaremos las matrices de giro inversas a las utilizadas en el paso 2), *siguiendo el orden inverso*.

5) Finalmente, una vez que el eje haya recuperado su orientación original, también se ha de llevar, junto con el objeto, a su posición inicial, para lo cual se aplica la matriz de traslación inversa a la realizada en el paso 1).

Como acabamos de ver, el tiempo de cálculo de los giros sobre un eje cualquiera podría ser grande, pues al intervenir muchas matrices el total de multiplicaciones se dispara, a medida que crece el número de puntos significativos del modelo. Dicho tiempo puede reducirse notoriamente utilizando la *matriz compuesta*, la cual se obtiene multiplicando las matrices que aparecen, y en el mismo orden. Por tanto, la matriz neta para el giro en un eje cualquiera será

$$\mathbf{G}(\theta) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{G}_x(\varphi) \cdot \mathbf{G}_y(-\alpha) \cdot \mathbf{G}_z(\theta) \cdot \mathbf{G}_y^{-1}(-\alpha) \cdot \mathbf{G}_x^{-1}(\varphi) \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

### 1.2.6 Reflexiones

Algunas orientaciones deseables para los objetos tridimensionales no pueden ser obtenidas usando solamente giros. Con la reflexión se consigue un efecto "espejo", de modo que los objetos se ven reflejados en un plano.

Cuando la reflexión se hace sobre uno de los planos ortogonales ( $x = 0$ , o  $y = 0$ , o bien  $z = 0$ ) la matriz de transformación es sencilla, pues es similar a la *matriz identidad*, aunque siendo  $-1$  el elemento que representa a la coordenada que es nula en el plano de reflexión. Así, las matrices de reflexión para los planos XY, XZ e YZ son

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



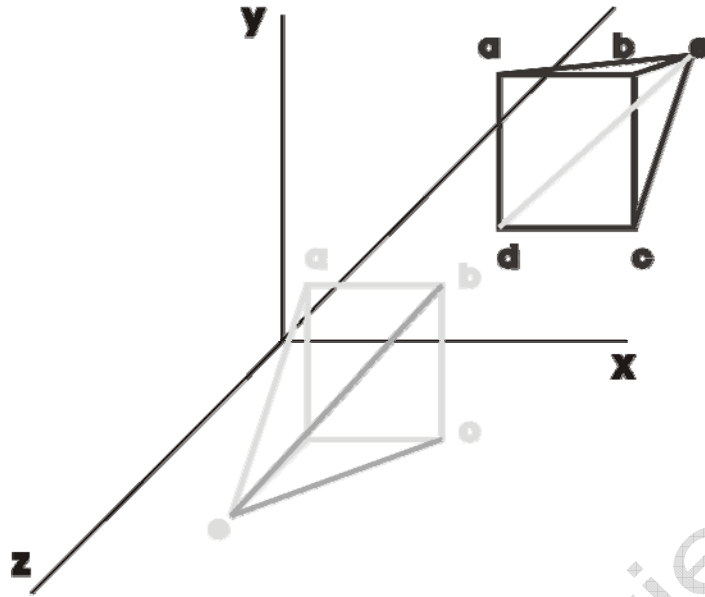


Figura 13: reflexión especular en el plano XY

Cuando se quiera una reflexión sobre un plano cualquiera, el proceso se complica notablemente. La técnica utilizada es similar a la del giro sobre eje arbitrario. En este caso, inicialmente se requiere definir un punto en el plano, y la *normal* al plano en ese punto.

El proceso de reflexión se resume en los siguientes puntos:

- Trasladar el punto establecido del plano al origen de coordenadas
- Realizar los giros oportunos para hacer coincidir el vector normal al plano de reflexión con uno de los ejes de coordenadas; así el problema se reduce a una simple reflexión sobre alguno de los planos del sistema de referencia. Por ejemplo, si el eje escogido es el Z, el plano de reflexión sería el XY.
- Realizar la reflexión sobre el plano seleccionado
- Aplicar las transformaciones inversas para devolver el plano de reflexión a su posición original.

La matriz neta podría ser, por ejemplo, el resultado de la composición de las matrices  $[M] = [T] \cdot [G_x] \cdot [G_y] \cdot [R_z] \cdot [G_y]^{-1} \cdot [G_x]^{-1} \cdot [T]^{-1}$ , si se opta por realizar las transformaciones para alinear el vector normal con el eje Z. En tal caso, la matriz de reflexión a utilizar sería la  $R_z$ .

### 1.3 Transformaciones deformantes

Veamos brevemente las transformaciones deformantes, que hacen que un objeto se estreche, se contorsione o se doble.

Para conseguir que un objeto se estreche a lo largo de un eje (el Z, por ejemplo), hay que aplicar a ese objeto un cambio de escala *no uniforme*. Así, a cada vértice del objeto se le ha de aplicar el cambio de escala definido por

$$x' = rx, \quad y' = ry, \quad z' = z$$

donde  $r = f(z)$ .

Esto significa que las coordenadas  $z$  de los vértices del objeto no variarán, mientras que las coordenadas  $x$  e  $y$  dependerán de los valores de  $z$ , ya que están multiplicadas por una función de  $z$ .

La contorsión de un objeto se consigue aplicándole una rotación sobre uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo el  $z$ , con un ángulo  $\alpha$ . Este ángulo  $\alpha$  no tendrá un valor fijo si no que será una función de la variable del eje sobre el que se gira, en este caso  $\alpha = f(z)$ .

Para doblar un objeto a lo largo de un eje se ha de dividir el mismo en dos regiones, aplicando en cada una transformaciones diferentes.

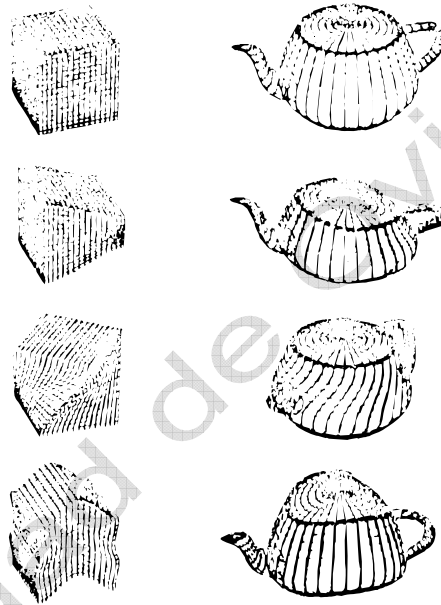


Figura 14: resultado de aplicar transformaciones deformantes a dos objetos

La aplicación de una transformación deformante en un objeto puede afectar a las características topológicas del objeto, es decir, a la relación entre vértices, aristas y caras, perdiéndose información. Esto podría dar lugar a fallos en el renderizado, por lo que la resolución del objeto posiblemente sería inferior, o bien, si el número de polígonos que forman el objeto es pequeño, puede que no fuese posible visualizar el objeto resultante.

Por lo general, las transformaciones deformantes no son procesos fáciles, por lo que para implantarse se aconseja acudir a libros especializados.

## 1.4 Transformaciones lineales del visor

A la hora de renderizar, el *visor* (cámara) puede ser considerado como un objeto más, en lo que respecta a las transformaciones lineales. Sin embargo, el movimiento de los visores tiene sus propias peculiaridades, por lo que conviene estudiar de modo independiente las transformaciones lineales que se aplican a estos objetos. Para ello, antes es preciso dar una descripción geométrica de los visores.

### 1.4.1 Descripción de los visores

En un sistema gráfico el visor suele quedar representado como sigue:

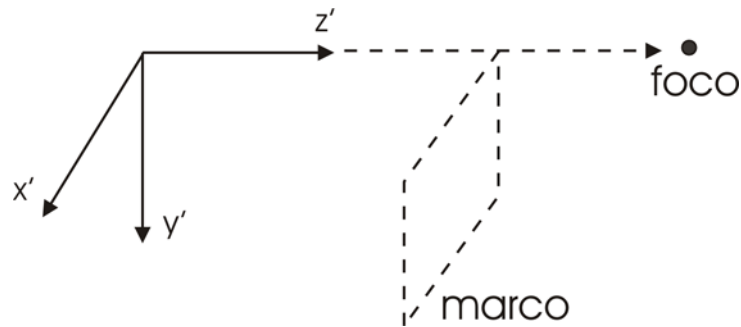


Figura 15: esquema gráfico de un visor

En nuestro caso supondremos que el eje  $Z'$  pasa por el centro del **plano visual**, y que el *observador* (**punto o centro de proyección**) se encuentra en el origen del **sistema de referencia del visor (SRV)**, tal como muestra la siguiente figura.

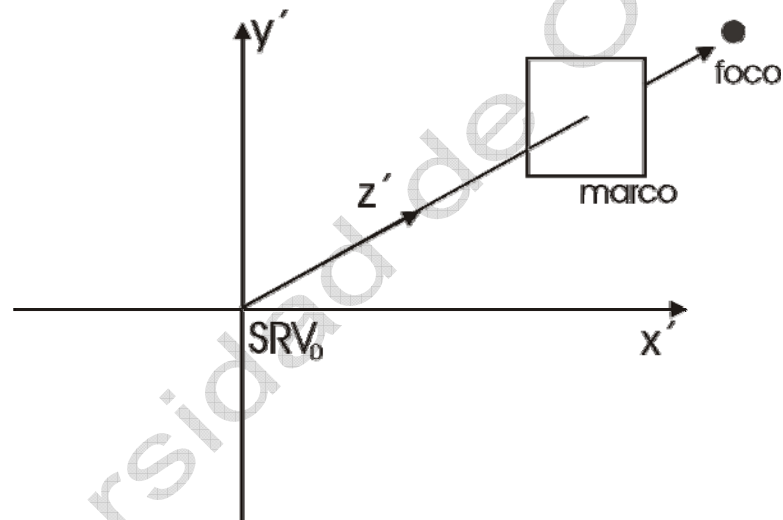


Figura 16: esquema gráfico del visor.

Para darnos cuenta de que el visor en el SUR es en realidad un objeto más (aunque normalmente sea invisible), podemos imaginarlo como una caja cerrada (Figura 17)

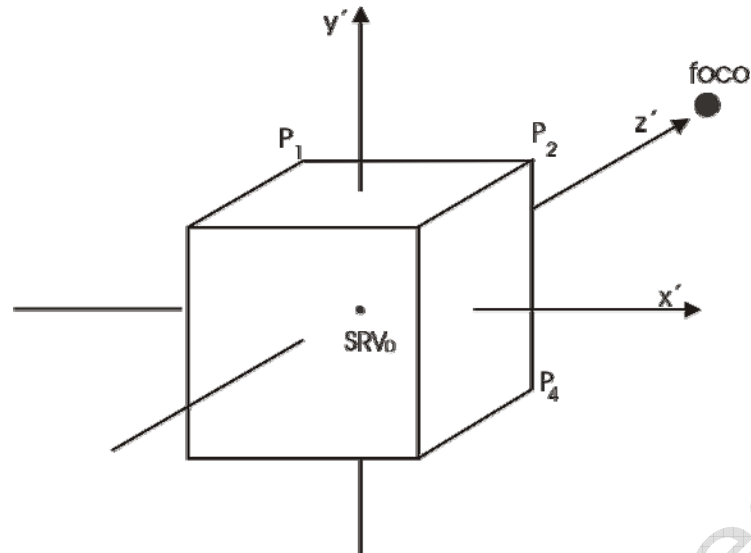


Figura 17: puntos significativos del visor

donde  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  son los vértices del marco, que configuran los límites del **sistema de referencia del plano visual (SRPV)**, siendo  $SRV_0$  el origen del SRV.

En los libros de texto al eje  $Z'$  del SRV suele quedar indicado por  $N$ , al ser normal al plano visual; el eje  $Y'$  por  $U$  (de  $Up$ ), dado que este eje se utiliza para controlar la verticalidad del visor. Por último, al eje  $X'$  se le llama  $V$ . Debido a esta nomenclatura, el sistema de referencia del visor (SRV) con frecuencia es denominado **NUV**. Además, al vector unitario  $Z'$  también se le conoce como **vector de enfoque ( $V_f$ )**, dado que su prolongación pasa por el foco elegido.

Con frecuencia el  $SRV_0$  y el punto de proyección coinciden, aunque esto puede no ser así. Cuando el *punto de proyección (PP)* no se encuentra en el eje  $Z'$ , a la recta que une el PP con el foco se le denomina *eje visual* (Figura 18); el vector unitario de dicha recta se conoce como la *visual del observador ( $V_o$ )*. Si  $SRV_0 = PP \Rightarrow V_f = V_o$

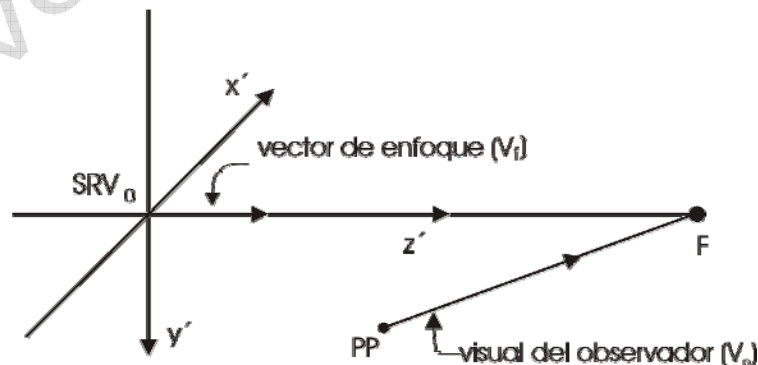


Figura 18: punto de proyección fuera del eje de enfoque

### 1.4.2 Traslación de los visores

Para trasladar el visor desde un lugar del SUR a otro, se ha de aplicar la matriz de traslación a todos los puntos significativos del visor, es decir, al conjunto de puntos  $\{SRV_0, PP, P_1, P_2, P_3\}$ . En definitiva, el visor se traslada

de la misma forma que los objetos.

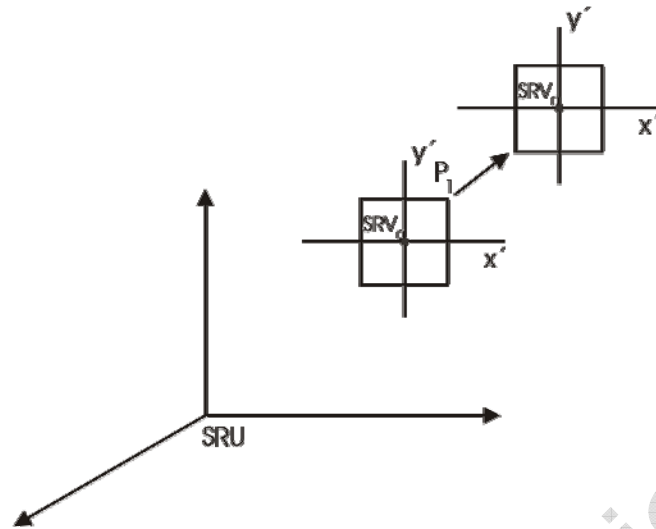


Figura 19: traslación de los visores

### 1.4.3 Cambio de escala de los visores

El cambio de escala del visor normalmente se realiza de modo que el  $SRV_0$  no varíe su posición en el SUR, es decir, se efectúa con respecto a un punto fijo. El proceso de cambio de escala queda como sigue:

- 1) Siendo  $(x_0, y_0, z_0)$  las coordenadas del  $SRV_0$  en el SUR, se aplica la matriz de traslación  $T(-z_0, -y_0, -z_0)$  sobre los puntos significativos del visor.
- 2) A continuación se aplica el vector de escala  $E(k_z, k_y, k_x)$ , donde  $k_z = k_y = k_x$ .
- 3) Por último se devuelve a su posición original, mediante  $T^{-1}$ .

El cambio de escala en el visor produce el efecto zoom.

### 1.4.4 Rotación de los visores

Para girar el visor existen varios planteamientos operativos básicos. Los más frecuentes son:

- 1.- Dar uno o más ángulos de giro, hasta que el visor enfoque hacia donde deseamos.
- 2.- Establecer las coordenadas del foco, y hacer que el *vector de enfoque* se dirija hacia el foco.

#### A) Primer planteamiento

Supongamos que tenemos posicionado el visor en el SUR, con el vector de enfoque apuntando hacia cualquier lado, es decir, el SUR y el SRV no tienen por qué estar alineados.

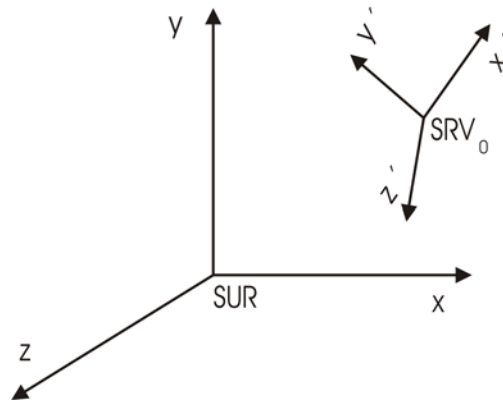


Figura 20: ubicación y orientación inicial del visor en el SUR

Si queremos enfocar el visor mediante ángulos de giro, la primera cuestión que se ha de resolver es averiguar el eje o ejes de giro más apropiados para controlar el visor.

Dado que el visor es nuestro representante en el SUR, no tiene demasiado sentido girarlo con respecto a los ejes (o un eje cualquiera) del SUR. Cuando giramos la cabeza (y por tanto los ojos), lo hacemos con referencia a nosotros mismos, y no con respecto a la habitación donde nos encontramos. Por tanto, parece lógico que el control del visor sea más intuitivo si los ángulos de giro se dan respecto al SRV, es decir, tomando ( $Z'$ ,  $Y'$ ,  $X'$ ) como ejes de giro.

Ahora bien, como los ejes  $Z'$ ,  $Y'$ ,  $X'$  no tienen por qué estar alineados con  $Z$ ,  $Y$ ,  $X$ , para poder girar el visor, y obtener por tanto las coordenadas finales de los puntos significativos del visor en SUR, es necesario alinear primero el SRV con el SUR. El proceso sería similar al utilizado para girar un objeto en un eje cualquiera. Gráficamente quedaría

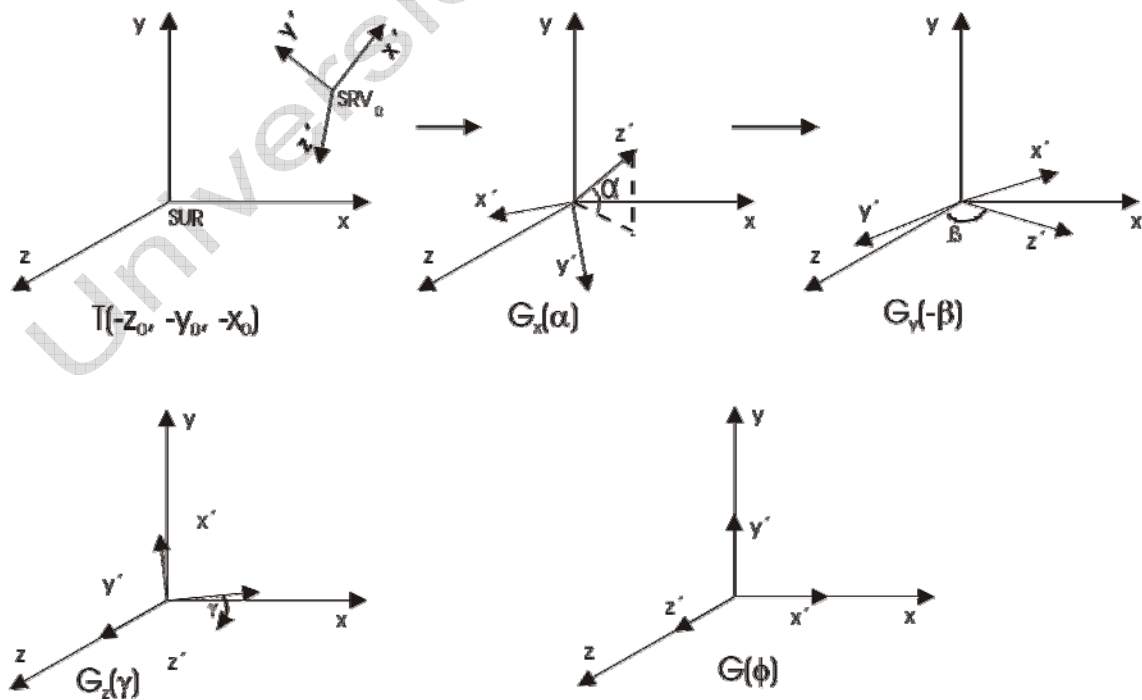


Figura 21: primera fase del giro relativo de un visor

Después de girar el visor un ángulo  $\phi$  alrededor de uno de los ejes, para devolverlo a su posición original se debería calcular el producto de matrices inversas  $\mathbf{G}_z^{-1}(\gamma) \cdot \mathbf{G}_y^{-1}(-\beta) \cdot \mathbf{G}_x^{-1}(\alpha) \cdot (\mathbf{T}^{-1})$ .

De igual modo que en los objetos, esta forma de girar el visor utiliza giros relativos, o sea, partiendo de la posición actual.

i.- Giros absolutos en los visores

Hasta el momento, todos los giros que hemos visto, tanto para los objetos, como para el visor, han sido relativos, es decir, partiendo de la ubicación y orientación actual del objeto. Sirviéndonos de un visor, analicemos ahora cómo sería el giro absoluto.

La característica más peculiar del giro absoluto de los visores es que, a la hora de efectuar el giro se parte de de un visor en el *estado cero*, es decir, con el SRV alineado con el SUR

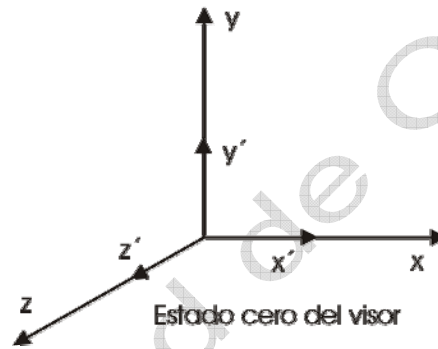


Figura 22: estado cero del visor

Por tanto, la principal ventaja del giro absoluto es que *se evitan todos los pasos* (transformaciones lineales) *necesarias para llevar el visor* (y objetos en general) *hasta el estado cero*, como ocurre en los giros relativos. Por el contrario, como enseguida veremos, es necesario llevar un *control de giro absoluto* de cada componente de giro, es decir, se ha de tener actualizado el vector de giro absoluto  $\Phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ .

Al igual que en los giros relativos, en los absolutos *el usuario controla los giros mediante variaciones (positivas o negativas) de las componentes de giro*  $(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ , que constituyen el **vector incremental de giro**  $(\Delta\Phi)$  en un momento dado. En el caso de los visores, el *vector de giro* viene dado con respecto al sistema de referencia local del visor (SRV), pues según hemos visto, la manera más intuitiva de girar un visor es sobre los ejes  $(X', Y', Z')$  del SRV.

Para comprender mejor los giros absolutos se han de tener presente que

- Como siempre, los giros se ejecutan sobre los ejes ortogonales del SUR, lo que implica que al gira el visor en Z, Y, X, también girarán los ejes  $X', Y', Z'$ .
- Dado que los ángulos de giro vienen dados con respecto a  $X', Y', Z'$ ,

$Z'$ , dichos ángulos, vistos desde el SUR, podemos decir que son acumulativos. Por ejemplo, si un visor que parte del estado cero queda girado en  $X'$  un ángulo  $\alpha_1$ , si más tarde se gira en el mismo eje un ángulo  $\alpha_2$ , entonces la orientación actual será la misma que la que se obtendría girando el visor, a partir del estado cero, un ángulo  $(\alpha_1 + \alpha_2)$  en  $X'$ .

### Procedimiento para los giros absolutos

Supongamos que la posición actual del visor que se desea girar es similar a la mostrada en la Figura 20, con el  $SRV_o = (x, y, z)$ . Por otro lado, estableceremos que en un momento dado “ $t$ ”, el vector incremental de giro es  $\Delta\Phi_t = (\delta\phi_x, -\delta\phi_y, \delta\phi_z)$ . Según esto, el *control de giro absoluto* ( $\Phi_t$ ) vendría dado en el momento  $t$  por

$$\Phi_t = \Phi_{t-1} + \Delta\Phi_t$$

Veamos un caso concreto de giro absoluto de un visor. Para simplificar supondremos que el giro en  $Z'$  queda descartado o limitado a giros de  $90^\circ$ , de forma que el plano visual se posicione en *modo retrato* o bien en *modo paisaje* (Figura 23)

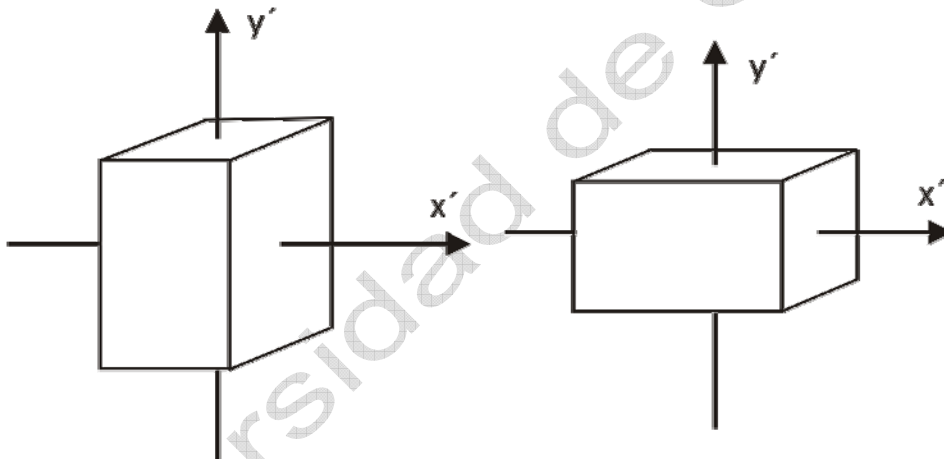


Figura 23: visor en modo retrato y paisaje

Además, cuando el visor deba girar en  $X'$  e  $Y'$ , establecemos que siempre gira primero en  $Y'$ , y luego en  $X'$ .

Sea entonces un usuario que pretende girar el visor en  $Y'$  y  $X'$  (en este orden), dejando el giro en  $Z'$  invariable, por lo que establece un incremento de giro  $(\delta\phi_x, -\delta\phi_y, 0)$ . Puesto que no desea variar la forma ni la posición del visor en el SUR, el giro puede realizarse de la siguiente manera:

1. Partiendo de un visor en estado cero, se escala (si es necesario) de modo que tenga las mismas características que el visor que vamos a girar.
2. A continuación, se le aplica el giro  $G_{Y'}(\phi_y) \cdot G_{X'}(\phi_x)$
3. Por último, como  $(x, y, z)$  son las coordenadas en SUR del visor que se quiere girar, se aplica la transformación  $T(x, y, z)$  al nuevo visor (centrado en el SUR), sustituyendo al antiguo.

Analicemos cómo se realiza el giro  $G_{Y'}(\phi_y) \cdot G_{X'}(\phi_x)$



Dado que las coordenadas finales del giro del visor han de estar dadas en el SUR, se ha de girar el visor en este sistema de referencia.

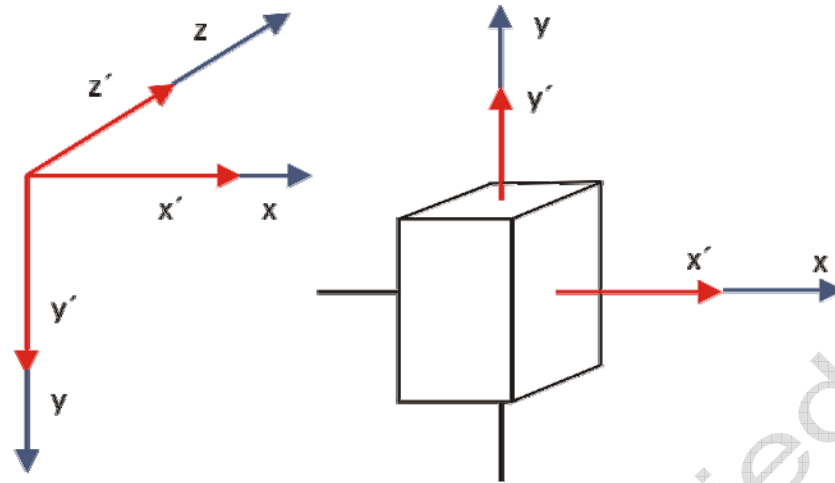


Figura 24: visor de partida en el estado cero

Aprovechando que se parte de un visor en el estado cero (Figura 24) es posible girar directamente el visor en Y, un ángulo  $\phi_y$ , mediante la matriz de giro en Y, lo cual queda indicado por  $G_{Y'}(\phi_y)$ . Sobra decir que, como ambos sistemas (SRV y SUR) están centrados y alineados, sucede que el giro en Y es igual al giro en Y'. Por tanto,

$$G_{Y'}(\phi_y) = G_Y(\phi_y)$$

Ahora se ha de aplicar el giro en X'. Ocurre sin embargo, que al realizar el giro en Y', el eje X' también ha girado con el visor (Figura 25), por lo que, si se quiere girar en X' (con respecto a SUR), se ha de aplicar el procedimiento de "giro en un eje cualquiera".

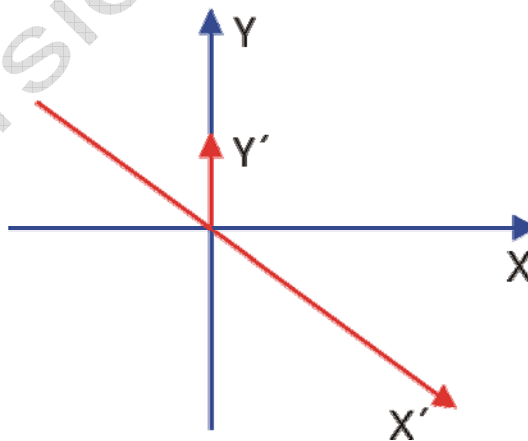


Figura 25: el giro del visor en Y, implica el giro de X'

Para ello se ha de alinear el eje X', con cualquiera de los ejes del SUR. Por conveniencia X' se alinea con el eje X. Como  $G_Y(\phi_y)$  ha sido la transformación que ha desalineado el eje X', si aplicamos la transformación  $G_Y^{-1}(\phi_y)$ , volveremos a tener X y X' alineados. A continuación se efectúa el giro  $G_X(\phi_x)$  y finalmente se devuelve el eje X' a su posición original, multiplicando nuevamente por la matriz  $G_Y(\phi_y)$ . En definitiva, el giro en X' queda como

$$G_{X'}(\phi_x) = G_y^{-1}(\phi_y) \cdot G_x(\phi_x) \cdot G_y(\phi_y)$$

En conclusión, el giro del visor en  $X'$  e  $Y'$  queda

$$G_{Y'}(\phi_y) \cdot G_{X'}(\phi_x) = G_y(\phi_y) \cdot G_y^{-1}(\phi_y) \cdot G_x(\phi_x) \cdot G_y(\phi_y)$$

Como  $G_y(\phi_y) \cdot G_y^{-1}(\phi_y) = 1$ , se tiene finalmente que

$$G_{Y'}(\phi_y) \cdot G_{X'}(\phi_x) = G_x(\phi_x) \cdot G_y(\phi_y)$$

## B) Segundo planteamiento

Según dijimos anteriormente, también es posible controlar el visor estableciendo las coordenadas del foco, y haciendo que el visor enfoque en esa dirección. Veamos dos métodos.

### i.- Centrar en un punto dado

Consiste en enfocar el visor de modo que éste quede ortogonalmente centrado sobre un punto seleccionado por el usuario.

1.- A través de un píxel seleccionado con el ratón, se averigua el punto de intersección (si existe) de la proyección en perspectiva con algún objeto del escenario. Esta operación es muy sencilla con los métodos de renderizado directos (ray casting o ray tracing). Así, siendo  $PP = (x_0, y_0, z_0)_{SUR}$  las coordenadas del *centro de proyección* en el SUR, y  $PX = (x_1, y_1, z_1)_{SUR}$  las coordenadas del píxel seleccionado, basta con trazar un vector (rayo) en la dirección  $(PX - PP)$ , para determinar las coordenadas de intersección con el objeto seleccionado del escenario.

2.- A continuación se calcula la normal en el punto de intersección elegido, y si no hay intersección, se elige un punto en la prolongación de la trayectoria de la proyección en perspectiva, a una distancia determinada del origen (o del píxel).

3.- Suponiendo que existe un punto de intersección, se multiplica la normal a la superficie por  $-1$  para cambiarle el sentido, de modo que apunte en la dirección contraria.

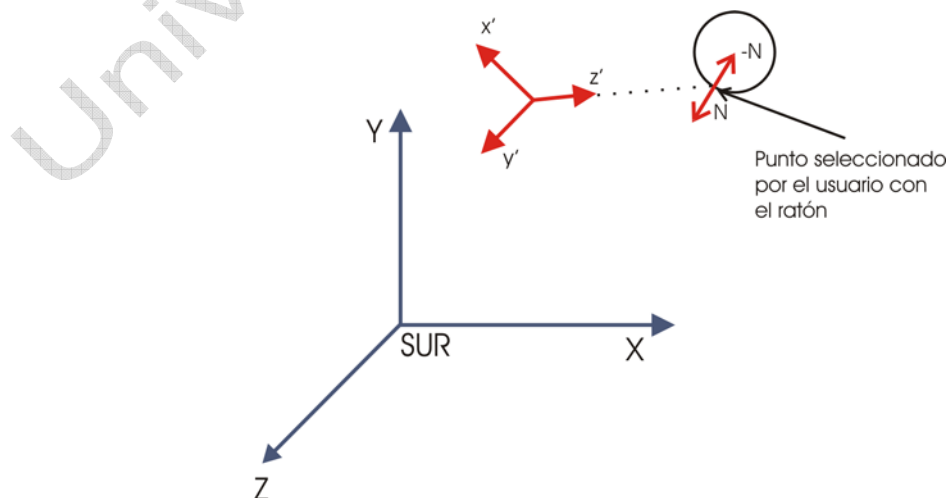


Figura 26: se calcula la normal en el punto de intersección y se cambia de signo

Los pasos que siguen son similares a los que se han de realizar para girar los objetos sobre un eje dado del SUR. Así,

4.- A continuación el vector  $-N$  se traslada del origen de coordenadas del SUR

5.- Una vez que se tiene el vector  $-N$  posicionado en el origen del SUR, se han de calcular los ángulos de giro  $\alpha'_i$  y  $\beta'_j$  que se han de aplicar a un *nuevo visor en estado cero*<sup>3</sup>, para que el vector de enfoque ( $V_f$ ) quede alineado con el vector  $-N$ .

Al estudiar el giro sobre un eje cualquiera ya hemos visto la manera de calcular estos ángulos. Otra forma de encontrar  $\alpha'_i$  y  $\beta'_j$  (que en el fondo es lo mismo) sería transformando las coordenadas cartesianas en el SUR, en coordenadas polares. Con ello encontraríamos directamente  $\alpha'_i$  y  $\beta'_j$ .

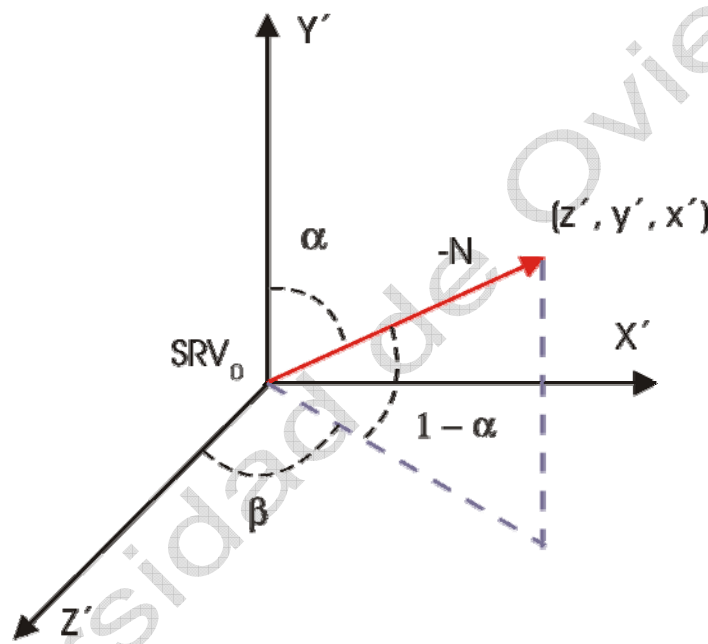


Figura 27: alineación del vector de enfoque mediante coordenadas polares

Quedaría entonces que

$$z' = (-N) \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$y' = (-N) \cos \alpha$$

$$x' = (-N) \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

Los ángulos a girar serían  $\beta'_j = \beta$  y  $\alpha'_i = (1 - \alpha)$

6.- Una vez que se conocen los ángulos de giro  $\alpha'_i$  y  $\beta'_j$ , se efectúa el giro del nuevo visor, tal como acabamos de ver en los giros absolutos.

7.- A continuación se busca un punto situado en la prolongación del vector  $N$ , a una distancia  $D_f$  del punto de intersección.

<sup>3</sup> Si es necesario, se ha de escalar para que sea idéntico al visor activo

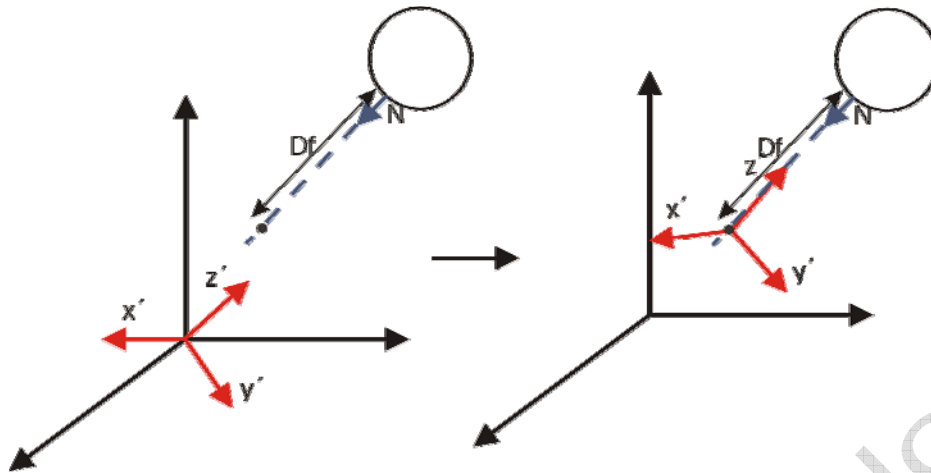


Figura 28: se traslada el visor a un punto de la trayectoria de la normal

8.- Por último, se traslada el visor a dicho punto (ver figura).

ii.- Enfocar hacia un punto dado.

Consiste en dirigir el vector de enfoque ( $V_f$ ) hacia un punto del escenario seleccionado por el usuario mediante el ratón, de manera que el origen del SRV ( $SRV_0$ ) no varíe.

1.- A través de un píxel seleccionado con el ratón, se averigua su punto de intersección de la proyección en perspectiva (si existe), de modo similar al expuesto en el caso anterior.

2.- Una vez conocidas las coordenadas del punto de enfoque, se averigua y normaliza el vector  $F$ , que une el punto de intersección y el  $SRV_0$ .

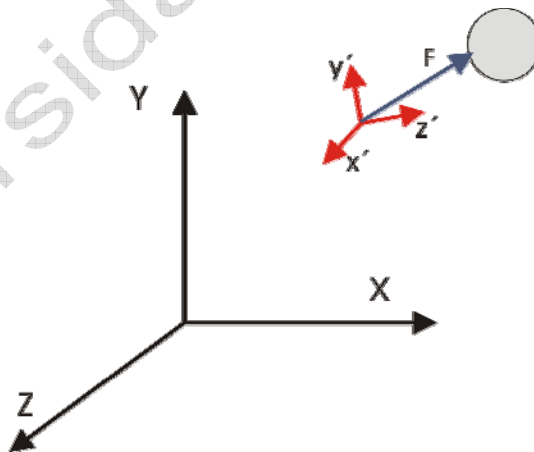


Figura 29: cálculo del vector de enfocar hacia un punto dado por el usuario

3.- A continuación se averiguan los ángulos de giro  $\alpha'_i$  y  $\beta'_j$  necesarios para que el vector  $V_f$  y el vector  $F$  queden alineados. Para ello, tras llevar  $F$  al origen del SUR, se pueden transformar las coordenadas cartesianas normalizadas de  $F$  en coordenadas polares.

4.- Una vez que se conocen los ángulos de giro, se gira un nuevo visor en estado cero, y finalmente se posiciona a SUR, según las coordenadas del  $SRV_0$  del visor antiguo.