

Tema VII

Introducción al Modelado Sólido

Ricardo Ramos

Colaboradores:

Juan Carlos García Rodríguez-Valle, Manuel Ignacio Sánchez-Andrade Ucha, Javier Piedra de la Llana, M^a Elia Solla Bárcena, Pablo García Rodríguez, Jesús Gómez López, Manuel Enrique Fernández García

Hasta el momento hemos estado viendo temas relacionados con la Síntesis de Imágenes. En este capítulo comienza el estudio del Modelado, que como se vio en el Tema I, constituye otra área de la Informática Gráfica. Empezaremos viendo una introducción al Modelado de Sólidos y los fundamentos en los que se basa.

1. Modelado: Concepto y Utilidad.

Un *modelo* es un objeto que facilita el estudio de otro. Por ejemplo, los *modelos físicos* permiten realizar trabajos sobre representaciones a escala de objetos reales (edificios, barcos, coches). Los *modelos moleculares* se utilizan para observar la posición relativa de los átomos de una molécula. Por otro lado, los *modelos matemáticos* representan algunos aspectos del comportamiento de los fenómenos modelados mediante datos numéricos y ecuaciones.

Los modelos son útiles, dado que a menudo permiten hacer estudios sobre objetos que de otra forma sería difícil realizar, ya sea porque aún no existen (aviones, barcos, etc.), o por que no son observables directamente (moléculas). Sin embargo, los modelos físicos y matemáticos están limitados al ámbito de su utilidad, de forma que para analizar un nuevo problema normalmente se requiere un nuevo modelo. Se ha intentado paliar este inconveniente dando a los modelos un carácter de *generalidad*. Tradicionalmente ha sido el *dibujo técnico* quien mayor éxito ha tenido como *técnica de propósito general* para describir modelos, ya que los planos se pueden utilizar para extraer información de diversas clases, incluyendo los datos para la formación de modelos físicos y matemáticos.

Sin embargo, con la llegada de los sistemas informáticos el dibujo técnico ha sido desplazado por los *modelos informáticos*, que debido a su dinamismo y universalidad superan con creces a cualquier otro tipo de modelado.

1.1 Modelos Informáticos

Los modelos informáticos se sirven de la enorme potencia de procesamiento de los ordenadores para realizar tareas similares a las que podrían hacerse con los modelos mencionados anteriormente, pero intentando aprovechar sus ventajas y evitar sus inconvenientes. Mediante técnicas y algoritmos desarrollados formalmente, es decir, con una base matemática sólida, se consiguen sistemas de modelado de propósito general que soportan una gran variedad de modelos diferentes, de igual modo que el dibujo técnico.

1.2 Modelado Geométrico.

La cantidad total de datos que se deben almacenar en un modelo informático, depende del ámbito de las preguntas que algorítmicamente queramos responder a partir del modelo.

Muchos de los problemas a resolver mediante modelos tienen naturaleza geométrica. Por ejemplo, el problema de hallar la imagen coloreada de un objeto incluye cuestiones geométricas tales como:

- 1) ¿Qué partes del objeto son visibles para el observador?
- 2) ¿Qué color ha de ser asignado a cada punto de la imagen?

Si podemos representar en el ordenador la forma geométrica de un objeto, podremos responder a estas preguntas y a muchas otras. De hecho, la información geométrica sobre un objeto es la parte más útil del total de información sobre el objeto. Además, las técnicas para almacenar y procesar la información geométrica son relativamente independientes de un modelo particular. Así, procesos esencialmente iguales de modelado se utilizan en la construcción de modelos de barcos, casas, o zapatos.

Acorde con lo dicho anteriormente, en un modelo tiene sentido separar la información geométrica de los objetos, de la no geométrica. Bajo este planteamiento, al total de información del modelo informático se conoce como *modelo del objeto*, mientras que la información exclusivamente geométrica constituye el *modelo geométrico*.

Por lo tanto, el concepto de *Modelado Geométrico* se refiere al conjunto de métodos utilizados para definir la forma y otras características de los objetos. La construcción de los objetos es normalmente, en sí misma, una operación asistida por ordenador. Éstos juegan un papel primordial, ya que sin su potencia de cálculo los procedimientos del Modelado Geométrico solamente podrían aplicarse en modelos de escasa importancia práctica.

Los métodos del Modelado Geométrico vienen a ser un compendio de las técnicas utilizadas en varias disciplinas, como la Geometría Analítica y Descriptiva, la Topología, la Teoría de Conjuntos, el Análisis Numérico, las Estructuras de Datos, el Cálculo Vectorial y los Métodos Matriciales.

Se pueden enumerar tres aplicaciones básicas del Modelado Geométrico:

- *Representación* de los objetos existentes.

- *Diseño* de los objetos inexistentes y
- *Visualización* (rendering) de los objetos.

El Diseño Asistido por Ordenador (CAD) y la Fabricación Asistida por Ordenador (CAM), han sido las principales fuerzas de desarrollo del campo del Modelado Geométrico, aunque otras áreas como la Robótica, Reconocimiento de Formas, Inteligencia Artificial, y el Cálculo Estructural (modelos de elementos finitos) han contribuido también a su desarrollo.

2. Evolución Histórica del Modelado Geométrico

Las raíces del Modelado Geométrico se encuentran en los primeros sistemas gráficos, que fueron desarrollados al comienzo de la década de los 60 con propósitos CAM. Esto dio lugar a la revolución industrial de la *maquinaria numéricamente controlada* (NC).

El siguiente paso importante fue dado en el MIT, con el desarrollo de un compilador para un lenguaje de descripción gráfica (1967). Paralelamente, las principales multinacionales en los campos automovilísticos, aviación, etc. desarrollaron sus primeros sistemas gráficos de diseño.

A mediados de los 70 se produjeron avances significativos en el Modelado Geométrico. Las limitaciones iniciales que presentaban los primeros sistemas gráficos fueron superadas desarrollando nuevas técnicas, las cuales permitieron realizar lo que conocemos como *superficies esculpidas* (sculptured surfaces), las superficies paramétricas, de Bezier, etc.

Mientras tanto, se desarrollaron los primeros modeladores alámbricos (wireframe) y los esquemas poligonales, de los cuales hablaremos más tarde. Inicialmente estos sistemas fueron bidimensionales y trataban de implantar lo que se conoce como *dibujo técnico* para ser realizado con el ordenador.

Finalmente surgieron los esquemas de *Modelado de Sólidos* (o Modelado Sólido¹), sobre los que pasamos a hablar a continuación.

3. Modelado Sólido

El Modelado Sólido es una rama relativamente reciente del Modelado Geométrico, que hace hincapié en la aplicabilidad general de los modelos, e insiste en crear solamente modelos "completos" de los sólidos, es decir, modelos que son adecuados para responder algorítmicamente (sin la ayuda externa del usuario) a cualquier pregunta geométrica que se formule.

¹ Actualmente, algunos autores no utilizan el término de "Modelado Geométrico", englobando todas las técnicas de diseño tridimensional bajo el término de "Modelado Sólido".

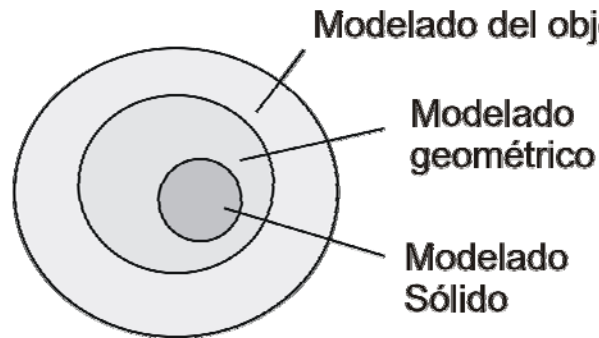


figura 1: estructura de subconjuntos en el Modelado.

Los principales esquemas de Modelado Sólido desarrollados son el de *Representación de Fronteras* (Boundary Representation o **B-Rep**) y el de la *Geometría Constructiva de Sólidos* (Constructive Solid Geometry o **CSG**), aunque existen muchos otros, como el *modelado de barrido translacional y rotacional*, o los *esquemas de modelado híbridos*.

El objetivo de "aplicabilidad general" diferencia los esquemas de Modelado Sólido de otros esquemas de modelado geométricos, los cuales se utilizan en casos especiales. Así, los *modelos gráficos* (graphical models) se utilizan para describir el dibujo técnico de los objetos, por ejemplo en ingeniería. Los *modelos de formas* (shape models) representan imágenes de los objetos. Pueden ser una colección sin estructurar de elementos de una imagen, o poseer cierta estructura para, por ejemplo, realizar operaciones de tratamiento de imágenes. Los *modelos de superficie* (surface models) dan información detallada sobre superficies, pero no siempre proporcionan la información suficiente para determinar todas las propiedades geométricas.

3.1 Desarrollo histórico del Modelado Sólido

Las universidades de Hokkaido y Cambridge desarrollaron los primeros sistemas gráficos basados en esquemas de Modelado Sólido: TIPS y BUILD, respectivamente. Se presentaron en Budapest en 1.973, demostrando su superioridad sobre cualquier otro sistema de Modelado Geométrico.

TIPS utiliza figuras básicas (primitivas) y operaciones booleanas para definir sólidos en tres dimensiones. Esta técnica se conoce actualmente como Geometría Constructiva de Sólidos (*Constructive Solid Geometry* o *CSG*).

BUILD define los objetos como un conjunto de superficies, más la información topológica que las relaciona (cómo se conectan las caras, aristas y vértices). Hoy se conoce esta técnica como la Representación por Fronteras (*Boundary Representation* o *B-Rep*).

Desde entonces han surgido otros muchos modeladores, pero la gran mayoría usan conceptos de los dos anteriores o incluso de ambos (Modeladores Híbridos).

En 1977 se desarrolló en la universidad de Rochester (Estados Unidos) el sistema gráfico PADL-1, que utiliza CSG para definir los objetos, pero que puede convertir automáticamente las representaciones a B-Rep. La conversión en sentido contrario presenta muchos problemas.

3.2 Problemas en el Modelado Sólido

El requerimiento de aplicabilidad general de los modelos sólidos implica la necesidad de que sean completos y exactos. Conseguir esto resulta problemático. A continuación se explican los puntos más conflictivos:

3.2.1 Que sean completos

Los modelos informáticos más simples trasladan los métodos usados en dibujo técnico al ordenador para crear modelos gráficos bidimensionales. Estos modelos consisten en objetos gráficos en dos dimensiones, como líneas, arcos, texto y otras notaciones necesarias en la figura.

Los modelos gráficos bidimensionales sirven especialmente para hacer más eficiente la generación de dibujos técnicos y mejorar su calidad. Pero los ordenadores no pueden interpretar esos modelos para generar una imagen tridimensional correcta en todos los casos. En general, los modelos gráficos 2D no sirven para el Modelado Sólido, ya que no se puede responder algorítmicamente a todas las preguntas geométricas en tres dimensiones, a partir de los dibujos realizados en 2D.

Los modelos gráficos bidimensionales pueden ser transformados en modelos tridimensionales, añadiendo la información de la tercera coordenada. De esta forma se obtiene una representación de sólidos conocida normalmente como *modelo alámbrico* (wireframe model). Con el modelo alámbrico es posible almacenar un solo modelo tridimensional, y generar todas las vistas bidimensionales a partir de él, superándose de esta manera los problemas planteados por los modelos gráficos en 2D.

Sin embargo, un grupo de líneas tridimensionales no es suficiente para representar una figura ya que, en ocasiones, se pueden dar varias interpretaciones. Un ejemplo común es mostrado en la figura 2.

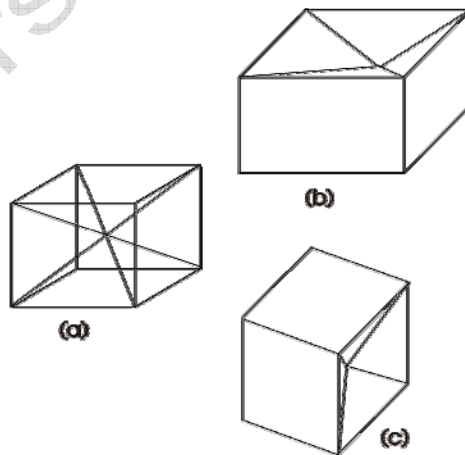


figura 2: posibles interpretaciones de un modelo gráfico ambiguo.

Otro problema que plantean los modelos alámbricos es que permiten el diseño de objetos que no pueden ser creados como objetos 3D reales, según se muestra en la figura 3

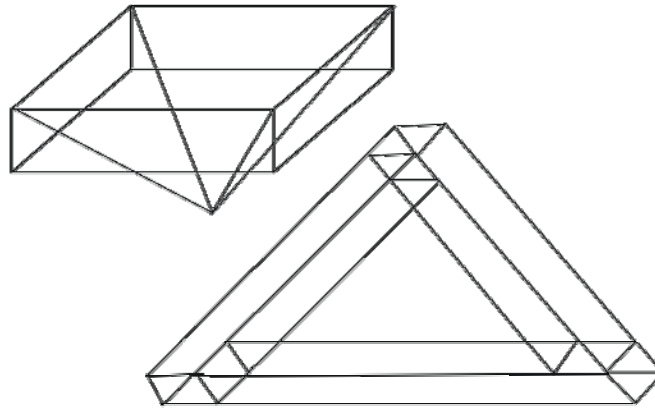


figura 3: objetos alámbricos sin sentido.

Otra deficiencia de los modelos alámbricos es la falta de contorno o información de perfil para las superficies supuestas entre las aristas alámbricas (ver la figura 4)

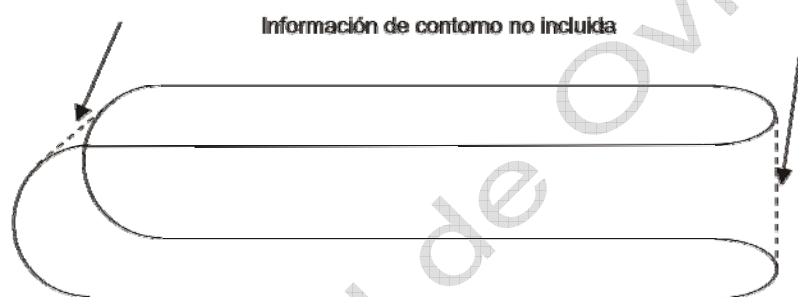


figura 4: información de contorno perdida

Resumiendo, el problema de los modelos gráficos (en 2D), y los alámbricos (en 3D) es que no ofrecen una información geométrica completa de la forma del objeto, aunque puede ser suficiente para responder muchas preguntas geométricas sobre éste. De todas formas, los modelos gráficos son perfectamente apropiados para las tareas para las que originalmente fueron desarrollados, es decir, generación y representación de dibujos técnicos.

3.2.2 Integridad

Para resolver el problema de eliminar líneas y superficies ocultas, normalmente se reemplazan los modelos gráficos por *modelos poliédricos*. Estos modelos proporcionan la suficiente información para identificar las partes de los objetos que quedan ocultas al observador. Se construyen a partir de primitivas bidimensionales (polígonos) en vez de sólo líneas.

Al reemplazar líneas por polígonos aparecen nuevos problemas. Normalmente, los algoritmos de eliminación de líneas ocultas asumen que los polígonos no intersecan entre sí, excepto en los vértices y aristas comunes. Obviamente, un modelo poliédrico no puede incluir polígonos con intersecciones entre ellos, pues la superficie del objeto tendría intersecciones consigo misma. Por lo tanto, sólo se considerarán válidos a aquellos modelos poliédricos con polígonos sin intersecciones mutuas. Pero ¿cómo asegurarse de que los modelos cumplen este criterio?

El comprobar que el Modelado Sólido cumple este u otros requisitos

preserva la *integridad* del modelo, evitando la generación de modelos incorrectos. Sin embargo, la comprobación de la integridad de los modelos trae consigo una disminución en la facilidad de uso y flexibilidad de los sistemas de modelado.

3.2.3 Complejidad y cobertura geométrica

El problema de la integridad está relacionado con otro: la *complejidad* en la generación de un modelo poliédrico. Incluso objetos relativamente simples requieren más de cien polígonos; generar toda esa información a mano es complicado, tedioso y propenso a errores.

La *cobertura geométrica* de un modelo poliédrico no es suficiente para tareas que requieren un modelado exacto de superficies curvas (como la carrocería de un coche), motivo por el cual se han desarrollado métodos para manejar formas complejas.

4. Naturaleza del Cálculo Geométrico

De acuerdo con el principio de universalidad, se espera de los modelos sólidos que sean capaces de responder algorítmicamente a las preguntas geométricas típicas que aparecen en las aplicaciones de ingeniería. Estos son algunos ejemplos de dichas preguntas:

¿Cuál es el aspecto del objeto? ¿Cuál es su peso, área, etc.? ¿Toca el objeto a otro si se mueven? ¿Qué carga puede soportar? ¿Cómo puede fabricarse con los procesos de manufacturación disponibles?

La contestación a estas preguntas podría ser una imagen, un número o una constante booleana. De hecho, incluso podría ser otro modelo sólido, como por ejemplo en la siguiente pregunta: ¿cuál es el efecto del proceso de fabricación aplicado a este objeto? Obviamente, es importante que un sistema de Modelado Geométrico incluya la posibilidad de modelar no sólo objetos físicos, sino también los efectos de aplicar sobre ellos procesos físicos. El sistema de modelado también debería ser capaz de realizar iteraciones, realizando operaciones sobre los resultados obtenidos al hacer operaciones similares anteriormente. Es decir, las operaciones disponibles en el sistema de modelado deben formar un **sistema cerrado** donde se garantice que todas las operaciones mantengan la corrección de los modelos generados en las operaciones anteriores.

5. Sistemas de Modelado de Sólidos

En las aplicaciones gráficas, el software que se ocupa de los modelos sólidos, incluyendo el conjunto de algoritmos que solucionan los problemas geométricos más comunes, se suele llamar **sistema de modelado de sólidos**.

En la creación de un sistema de modelado de sólidos, además de los problemas que acabamos de ver, existen muchos puntos espinosos que hacen que el desarrollo de un sistema de modelado no sea una tarea trivial. Los pasos a dar en un sistema de modelado de sólidos puede resumirse de la siguiente manera:

Inicialmente, los objetos son descritos por el usuario mediante un *len-*

guaje de descripción, los cuales están basados en *conceptos de modelado* disponibles en el sistema de modelado. El usuario puede introducir la descripción mediante texto, o preferiblemente utilizando una *interface de usuario* que ayuda a la interacción gráfica.

Una vez introducidos, los objetos son traducidos para crear la *representación interna* real. La relación entre el lenguaje de descripción y la representación interna no es necesariamente directa. Además, un mismo sistema de modelado de sólidos puede incluir varios lenguajes de descripción, atendiendo a diferentes usuarios y aplicaciones.

La transformación del lenguaje de descripción a la representación interna es necesaria para poder encontrar las respuestas a las preguntas geométricas. De hecho, para que un sistema de modelado sea eficiente, debe soportar (utilizar) múltiples representaciones internas de los objetos. Por lo tanto, el sistema ha de incluir *algoritmos de conversión* que puedan modificar una representación en otra.

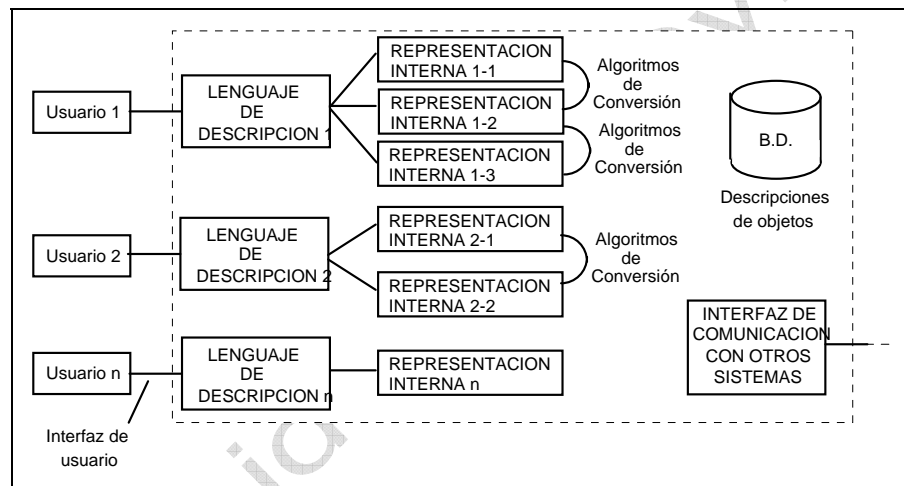


figura 5: sistema de Modelado de Sólidos

Además, el sistema de modelado ha de proveer interfaces para comunicarse con otros sistemas (importación/exportación). Estas interfaces son utilizadas para transmitir o recibir modelos hacia o desde otros sistemas de modelado. Necesariamente debe manejar información geométrica utilizando los diferentes formatos existentes.

Finalmente, el sistema de modelado debe incluir facilidades para almacenar descripciones de objetos y otros datos en bases de datos permanentes.

5.1 Niveles de Abstracción de un Sistema de Modelado de Sólidos

Se pueden distinguir tres niveles de abstracción:

* **Interface con el usuario.** Mediante un lenguaje de descripción, el usuario maneja el sistema gráfico con las operaciones normalmente disponibles a este nivel en cualquier aplicación (crear, modificar, salvar, borrar y analizar diseños).

* **Infraestructura matemática y algorítmica.** Implementa las ope-

raciones que proporciona el nivel anterior (por ejemplo, los algoritmos para construir la intersección de dos objetos).

* **Primitivas.** Son operaciones aritméticas y lógicas simples usadas por el nivel anterior para construir los algoritmos. Tanto los circuitos hardware especializados como el lenguaje de programación elegido forman estas primitivas.

6. Fundamentos del Modelado Sólido

Veamos una introducción a las técnicas de construcción y validación utilizadas en los esquemas de Modelado Sólido. Para ello, se define una serie de conceptos básicos de topología algebraica, teoría de conjuntos, etc., que son utilizados en los esquemas de representación.

Un sistema de Modelado Sólido maneja dos tipos de información: los datos geométricos y datos topológicos. Los datos geométricos son aquellos que representan geoméricamente los objetos (coordenadas de vértices, ecuaciones de superficies...). En cambio, los topológicos se refieren a cómo conectar componentes geométricos para conseguir un modelo.

A continuación veremos las características topológicas más útiles en modelado (en 2 y 3D), que sirven principalmente para validar la integridad de los modelos.

6.1 Teorema del camino cerrado.

El giro total a lo largo de un camino cerrado es un entero múltiplo de 360° . A este entero se le conoce como número de rotaciones (Nr) del camino. El valor de Nr es independiente de dónde se comience el recorrido del camino y de cómo esté orientado.

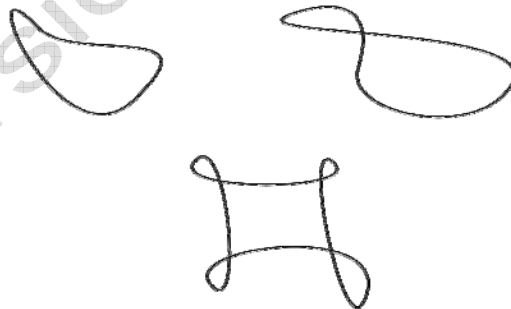


figura 6: ejemplo de caminos cerrados con valores de Nr diferentes

6.2 Teorema del camino cerrado simple.

Un *camino cerrado simple* es aquél que no se corta a sí mismo.

El **teorema del camino cerrado simple** dice que *el giro total en un camino cerrado que no se corte a sí mismo es $\pm 360^\circ$* . En otras palabras, el número de rotación Nr de un camino cerrado simple es ± 1 .

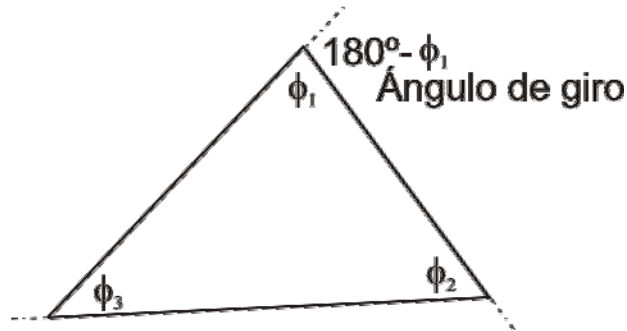


figura 7: la suma de los ángulos de giro en un camino cerrado simple es $\pm 360^\circ$

Por ejemplo, en un triángulo (figura 7), siendo ϕ_1 , ϕ_2 , y ϕ_3 sus ángulos internos, la suma de los ángulos de giro es:

Ec. 1

$$(180^\circ - \phi_1) + (180^\circ - \phi_2) + (180^\circ - \phi_3) = 3 \cdot 180 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = 540 - 180 = 360^\circ$$

Recordemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo (en la geometría euclidiana) es siempre 180° .

La importancia del teorema anterior en modelado radica en que es relativamente fácil medir los giros de los caminos cerrados (ej., los ángulos de los polígonos), aplicando métodos locales. De este modo, si al finalizar el recorrido de un camino cerrado (aristas de un polígono) el acumulado final del giro es diferente a 360° podemos asegurar que el modelo no es íntegro (está mal construido), ya que uno de sus polígonos se autointerseca, como ocurre en el ejemplo de la figura 8.

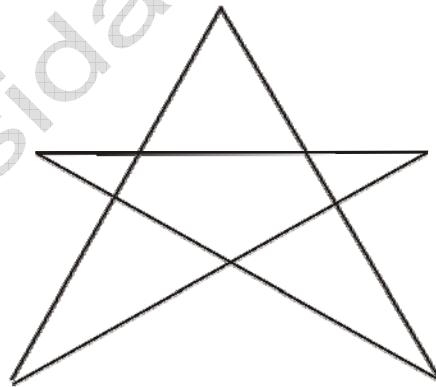


figura 8: los ángulos de giro en un camino cerrado no simple no suman 360°

Este teorema, aunque parece obvio, sin embargo no es fácil de demostrar rigurosamente ya que los caminos cerrados simples pueden llegar a ser extremadamente complicados.

6.3 Deformación de curvas y planos

El **teorema de deformación de curvas y planos** dice que *cualquier curva cerrada simple de un plano se puede transformar mediante una isotopía de ambiente en un cuadrado*.

En 1936, H. Whitney y W.C. Graustein observaron que *dos caminos cerrados coplanarios pueden transformarse el uno en el otro sólo si tienen el*

mismo giro total. Este resultado junto con el teorema anterior se puede utilizar para probar el teorema del camino cerrado simple: por una parte, cualquier curva cerrada simple en un plano se puede transformar en un cuadrado, y además, un camino cerrado sólo puede transformarse en otro si tiene el mismo giro total. Entonces podemos deducir que cualquier camino cerrado simple tiene el mismo giro total que un cuadrado, es decir, $\pm 360^\circ$, con lo que hemos demostrado el teorema.

Las transformaciones pueden ser de dos tipos:

- *Homotopía regular*. Es una deformación que produce cambios en el camino.

- *Isotopía de ambiente*. Supongamos que tenemos el camino dibujado sobre una lámina de goma. Si estiramos o encogemos la lámina por diferentes puntos, podemos conseguir que varíe la trayectoria del camino, o sea, una isotopía de ambiente o transformación de hoja de goma.

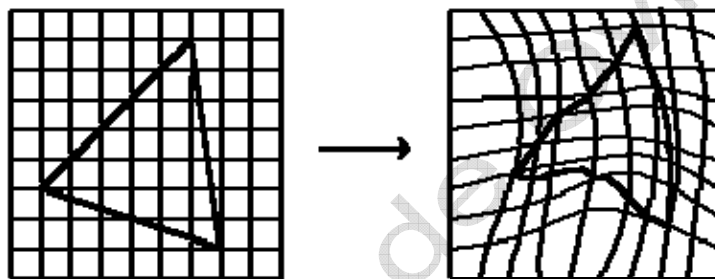


figura 9: deformación conservadora en una hoja de goma

La homotopía regular es más violenta (*no conservadora*) que la isotopía de ambiente (*conservadora*), ya que puede crear o eliminar puntos de corte, cosa que no hace ésta última. De hecho, una isotopía de ambiente es un caso especial de la homotopía regular, en la que no se añaden ni eliminan puntos de corte.

6.4 Teorema de la curva de Jordan.

Se deduce del teorema de deformación de curvas y planos y dice que *cualquier curva cerrada simple en un plano, divide a éste en dos regiones: una interior y otra exterior*. Da igual de qué curva cerrada simple se trate, pues siempre va a dividir al plano en una parte interior a la curva y otra exterior. Este teorema es válido sólo para curvas que estén en superficies planas, ya que podemos trazar una curva cerrada simple en un toro, por ejemplo, y no dividirlo en dos regiones.

El interior de la curva es deformable mediante una isotopía de ambiente y puede transformarse en un cuadrado. Una región, plana o no, que pueda ser transformada mediante una isotopía de ambiente en un cuadrado se llama *disco topológico* y se caracteriza porque no tiene huecos ni puntos aislados en él.

6.5 Ángulo de exceso

Se conoce como **ángulo de exceso** (o simplemente **exceso**), *el ángulo de giro implícito a un camino cerrado trazado sobre una superficie*. También se define como el giro que experimenta un puntero de referencia cuando es llevado alrededor de un camino cerrado. Como pronto veremos, el ángulo de exceso está íntimamente relacionado con la curvatura de las superficies.

El concepto de ángulo de exceso sirve para generalizar el teorema del camino cerrado simple, de modo que también sea válido para caminos cerrados simples sobre superficies curvas. La generalización de este teorema nos dice que *el giro total a lo largo de un camino cerrado simple, más el ángulo de exceso, debe ser igual a 360°* , es decir, que

Ec. 2

$$T + E = 360$$

donde:

T = Giro total a lo largo del camino

E = Ángulo de exceso a lo largo del camino

Para aclarar este concepto obsérvese la figura 10.

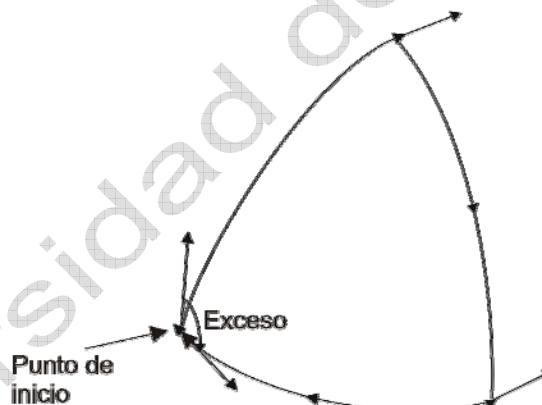


figura 10: concepto de ángulo de exceso

En esta figura se representa un cuadrante esférico. Supongamos que comenzamos a andar desde el punto de inicio, con un puntero sobre nuestra cabeza apuntando hacia el polo. Al llegar a éste, giramos 90° para volver al ecuador (obsérvese que sólo giramos nosotros, no el puntero, por lo que entre nuestra nariz y el puntero hay un ángulo de 90°). De vuelta en el ecuador, damos otro giro de 90° para regresar al punto de inicio (ahora nuestra nariz y el puntero miran en direcciones opuestas). Una vez allí damos otro giro de 90° que nos dejará en la posición inicial.

Se puede ver que el giro total que hemos realizado es de $90^\circ \times 3 = 270^\circ$. Luego $T = 270^\circ$. En cambio lo que ha girado el puntero (ángulo de exceso) es $E = 90^\circ$. Sumando ambas cantidades obtenemos 360° que es lo que afirmaba el teorema.

Cuanto más curva es la superficie mayor es el ángulo de exceso. Si la

superficie es plana, el ángulo de exceso es cero.

6.5.1 Propiedades del ángulo de exceso

1. Para un determinado camino, su ángulo de exceso es siempre el mismo, independientemente de donde comience el recorrido.
2. El ángulo de exceso es aditivo. Así, el exceso de cualquier polígono es igual a la suma de los excesos de los subpolígonos en que se subdivide.

6.6 Curvatura total de las superficies

Para cualquier disco topológico en una superficie cualquiera, el exceso que se obtiene alrededor de su frontera es igual a la curvatura total del interior.

Como el exceso posee la propiedad aditiva, si se subdivide una superficie cualquiera en piezas o trozos poligonales, y para cada polígono se calcula el ángulo de exceso, la suma de los excesos de cada polígono se conoce como *curvatura total de la superficie*, y se representa por K .

La curvatura total es una constante topológica para todas las superficies cerradas; por ejemplo, todas las esferas tienen la misma curvatura total.

Por tanto, podemos usar el ángulo de exceso para averiguar la curvatura total de un objeto, simplemente recorriendo caminos cerrados dibujados en la superficie y calculando sus ángulos de exceso.

6.6.1 Evaluación de la curvatura en los modelos 3D cerrados

Dos superficies cerradas son **topológicamente equivalentes** si es posible transformar una superficie en otra mediante *transformaciones conservativas*, es decir, deformaciones que no rompan o corten la superficie. Por ejemplo, un cubo y una esfera son topológicamente equivalentes, ya que es posible (al menos mentalmente) transformar progresivamente el cubo hasta convertirlo en una esfera, y viceversa. En cambio, el toro y la esfera no lo son, ya que no es posible obtener un toro a partir de una esfera sin romper (rasgar) la superficie de ésta.

Todos los objetos cerrados que son topológicamente equivalentes poseen la misma curvatura.

A) Esferas, toros y asas

Se puede calcular la curvatura total de los objetos de diferentes familias topológicas, a partir de la curvatura total de estos tres tipos de objetos: esferas, toros y asas.

Según vimos, el exceso de un cuadrante esférico es de 90° , o lo que es igual, su curvatura es de $\pi/2$. Como todos los cuadrantes son iguales, la curvatura total de la semiesfera es 2π ; por tanto, la curvatura total de la esfera será de 4π ($K = 4\pi$).

Por otro lado, aunque no se incluya la demostración, un toro (un donut o rosquilla) tiene una curvatura total 0 ($K = 0$), lo que no implica que el toro sea plano, sino que tiene tanta curvatura positiva como negativa.

Un toro, topológicamente hablando, puede considerarse como una esfera con un asa.

El proceso de añadir asas a las esferas no es una deformación topológica conservativa, ya que se ha de cortar la superficie de éstas, para pegar las asas. Esto implica que el objeto original y el resultante (después de añadir las asas) no son topológicamente equivalentes.

Para construir un toro a partir de una esfera se procede como sigue: primero se achatan (aplanan) dos regiones circulares en la esfera. De cada región se recorta un disco liso. A continuación se pega (o cose) un asa en los huecos dejados por los discos; el asa es un cilindro hueco (tubo) y sus aristas deben hacerse coincidir con los bordes de los discos recortados. El resultado obtenido será un toro como se muestra en la figura 11.

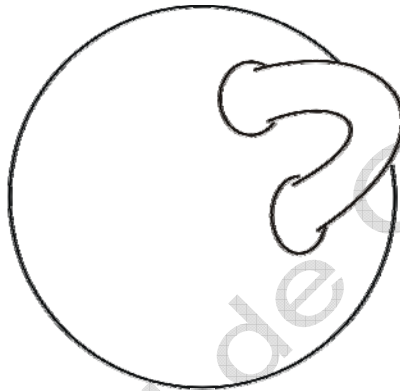


figura 11: esfera con un asa

En otras palabras:

Ec. 3

$$\text{esfera} - 2 \text{discos} + \text{asa} = \text{toro}$$

Para calcular la curvatura total del asa, en la Ec. 3 se sustituyen los objetos por su curvatura correspondiente² ($4\pi - 2 \cdot 0 + K_{\text{asa}} = 0$) obteniéndose que la curvatura del asa es -4π . Por tanto, vemos que al añadir asas a cualquier superficie, la curvatura total de dicha superficie disminuye en 4π . Además, observamos también que un toro con dos agujeros es topológicamente equivalente a un toro con un asa y a una esfera con dos asas.

En general, para una superficie topológicamente equivalente a una esfera con g asas, la curvatura total es

Ec. 4

$$K_{\text{esfera con } g \text{ asas}} = 4\pi(1 - g)$$

² Ver que los discos son planos, y por tanto su curvatura es 0

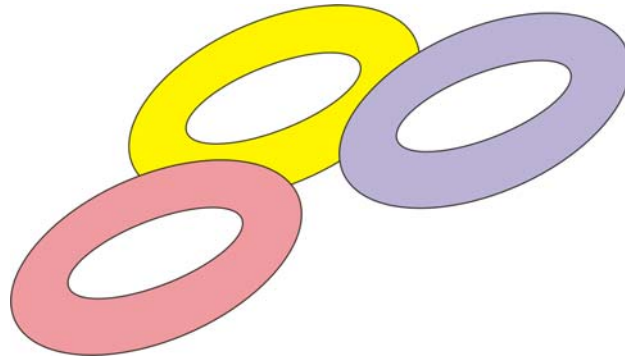


figura 12: equivalente topológico a una esfera con tres asas

“ g ” se conoce como *orden o grado del objeto* y también como *orden de la superficie*.

La importancia de esto es que cualquier superficie cerrada tridimensional que no se corte a si misma es topológicamente equivalente a una esfera con g asas. Por ejemplo, una superficie como la mostrada en la figura 12 es topológicamente equivalente a una esfera con 3 asas.

De la Ec. 4 se deduce que *la curvatura total de una superficie cerrada en el espacio tridimensional es un múltiplo de 4π* . Ver que esta afirmación no es otra cosa que la versión 3D del teorema del camino cerrado, o bien, del teorema de camino cerrado simple si $g = 0$. Esta característica topológica de las superficies cerradas es muy útil para la construcción y la validación de la integridad de los modelos complicados, ya que normalmente se conoce la familia topológica (g) del objeto modelado. Para ello se compara la curvatura calculada con la indicada por la Ec. 4. Si se desconoce g , al menos es posible verificar que su curvatura sea un múltiplo de 4π .

6.7 Estudio de los modelos de caras planas o poliedros.

El estudio de los modelos de caras planas tiene una importancia especial debido a que muchos esquemas de representación usan poliedros y la topología asociada a los mismos.

Por poliedro (poli- muchos, edro- cara) entendemos una disposición de polígonos de forma que solamente dos polígonos se unen en una arista, formando el conjunto de polígonos una superficie cerrada. Además, es posible recorrer la superficie del poliedro siguiendo sus aristas.

6.7.1 Características topológicas de los poliedros

El conocer las características topológicas de los poliedros es importante en la construcción de los modelos y especialmente en su validación. Comenzaremos viendo los tipos de poliedros más importantes para el modelado y sus propiedades topológicas.

A) Poliedros simples

Un *poliedro simple* es aquél que puede ser transformado de forma continua en una esfera, o sea, que es topológicamente equivalente a una esfera ($g =$

0).

Los *poliedros regulares* forman un subconjunto de los poliedros simples, cuya característica principal es que todas sus caras (polígonos) son iguales.

i.- Fórmula de Euler para los poliedros simples

Para un poliedro simple se cumple que el número de vértices, menos el número de aristas, más el número de caras es 2, es decir,

Ec. 5

$$V - A + C = 2$$

Según esta fórmula, se puede demostrar que sólo hay 5 poliedros regulares: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

ii.- Fórmula de Euler-Poincaré.

Poincaré generalizó la fórmula de Euler para el espacio n-dimensional. En lugar de puntos, aristas y caras, él definió elementos de 0, 1, ..., n-1 dimensiones. A cada uno de estos elementos lo llamó, N_0, N_1, \dots, N_{n-1} , respectivamente, y expresó la fórmula de Euler como

Ec. 6

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots = 1 - (-1)^n$$

Para $n = 3$ se obtiene la fórmula de Euler.

B) Poliedros no simples. Número de conectividad y de orden.

Los *poliedros no simples* son los equivalentes topológicos de cualquier objeto sólido con huecos, por lo que son muy útiles en el Modelado Sólido. En la figura 13 hay algunos ejemplos de poliedros no simples.

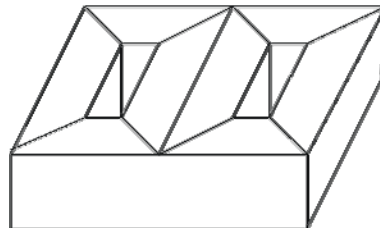
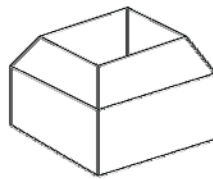


figura 13: ejemplos de poliedros no simples. No se pueden transformar en una esfera

Para proceder a la clasificación de los poliedros se recurre al concepto de **número de conectividad (n)**. Si la superficie de un poliedro se puede dividir en dos regiones separadas mediante un camino cerrado trazado a lo

largo de sus aristas, decimos que tiene conectividad $n = 0$. Esto es así porque una esfera se puede dividir en dos partes, por cualquier camino cerrado que tracemos sobre su superficie. Se considera que la conectividad de la esfera es 0 ($n = 0$).

De esto se obtiene un resultado: *cualquier poliedro cuya conectividad sea 0 puede ser transformado en una esfera*. En la figura 13 hay caminos cerrados que no dividen a la superficie del poliedro en dos partes separadas. A estos poliedros se les asigna un número de conectividad mayor que 0.

Formalmente se define el *número de conectividad* como *el máximo número de bucles distintos con o sin puntos comunes (intersecciones) que se puedan trazar sobre un poliedro, sin que se divida su superficie en dos regiones separadas*.

Se puede generalizar la fórmula de Euler a poliedros de cualquier número de conectividad n :

Ec. 7

$$V - A + C = 2 - n$$

Asimismo, se define el *grado "g"* de un poliedro de la misma forma que su número de conectividad, pero sin que los bucles se intersequen. La ecuación de Euler, generalizada a poliedros de cualquier grado g es:

Ec. 8

$$V - A + C = 2 - 2g$$

de donde se deduce que $2g = n$.

Estas fórmulas son útiles porque partiendo del número de aristas, vértices y caras del poliedro, se puede saber su número de conectividad y el grado

Ec. 9

$$n = -V + A - C + 2$$

$$g = \frac{(-V + A - C + 2)}{2}$$

De este modo se sabe si los poliedros equivalen topológicamente a una esfera, a un toro, etc.

6.7.2 Curvatura de los modelos poliédricos.

Toda la curvatura de las superficies de caras planas se concentra en los vértices, lo que facilita el cálculo la curvatura total (K). Sólo necesitamos sumar el ángulo de exceso de los pequeños caminos alrededor de cada vértice, es decir,

Ec. 10

$$K = \sum_{i=1}^v E_i$$

donde E_i es el exceso del camino alrededor del vértice i , y v el número de vértices del poliedro.

Recordando que $T + E = 2\pi$ la ecuación anterior queda:

Ec. 11

$$K = \sum_{i=1}^v (2\pi - T_i)$$

donde T_i es el *giro total* del camino alrededor del vértice i . Sacando el 2π fuera del sumatorio se tiene

Ec. 12

$$K = 2\pi V - \sum_{i=1}^v T_i$$

Teniendo en cuenta que el giro total del camino alrededor del vértice i (T_i) es igual a la suma de todos los ángulos interiores de dicho vértice, la expresión anterior se puede expresar más claramente si se agrupan los ángulos interiores por caras, aprovechando la propiedad asociativa de la suma.

Ec. 13

$$K = 2\pi V - \sum_{i=1}^C c_i$$

donde c_i es la suma de los ángulos interiores de la cara i y C es el total de caras del poliedro.

Este es un resultado sorprendente porque podemos calcular el segundo término sin saber cómo están unidas las distintas aristas. Por tanto, si conocemos todas las caras del poliedro y conocemos V , podemos calcular la curvatura total sin saber nada sobre las relaciones entre las aristas y las caras.

Para poliedros cuyas caras sean cuadrados la fórmula es todavía más simple, ya que la suma de los ángulos interiores de cualquier cara es 2π . Por tanto, $K = 2\pi V - 2\pi C$ ó $K = 2\pi(V - C)$. Ver que esta ecuación para calcular la curvatura total no depende de los ángulos para nada.

La expresión anterior aún se puede generalizar más. Partiendo de la Ec. 13, se puede demostrar que la suma $\sum_{i=1}^C c_i$ puede expresarse independientemente de los valores particulares de los ángulos; solamente se necesita conocer el número total de caras, vértices y aristas. Según esto, para una superficie de caras planas cerrada con V vértices, A aristas y C caras, la *curvatura total* es

Ec. 14

$$K = 2\pi(V - A + C)$$

A la cantidad $(V - A + C)$ se le llama *característica de Euler* de una superficie y se denota con la letra griega χ (chi). Usando esta notación, rescri-

bimos la fórmula de la curvatura como

Ec. 15

$$K = 2\pi\chi$$

La Ec. 15 muestra que, para cualquier superficie cerrada, la curvatura total y la característica de Euler están relacionadas. Esto constituye el **teorema de Gauss-Bonnet**, y puede ser aplicado a todo tipo de superficies cerradas, no sólo a las de caras planas, ya que la característica de Euler es una constante topológica al igual que a curvatura total. Este teorema es de suma importancia para la validación de las redes trazadas sobre superficies cerradas: *todas las infinitas redes diferentes que es posible trazar sobre una superficie cerrada poseen la misma característica de Euler.*

Este teorema proporciona resultados muy importantes, ya que además de ser un medio muy útil para poder calcular la curvatura total de las superficies cerradas, da una relación entre una cantidad definida en términos topológicos, como es la característica de Euler, con otra definida en términos geométricos, como es la curvatura total.

6.7.3 Representación topológica de los poliedros

Uno de los puntos clave en el modelado con poliedros es cómo se ha de registrar su información topológica, es decir, las relaciones entre los vértices, aristas y caras que los definen.

La forma más simple y directa para representar los poliedros consiste en describir cada cara por separado, señalando explícitamente cómo han de unirse. Este método de representación se conoce como **atlas**. La figura 14 muestra el atlas de un cubo.

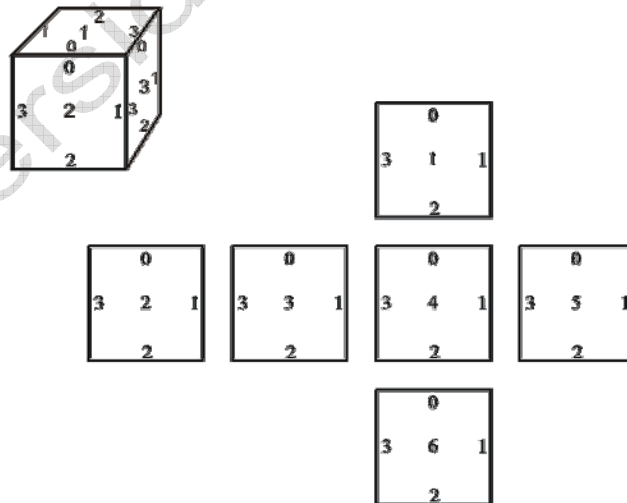


figura 14: atlas de un cubo

Cada eje se etiqueta con un par de números indicando la cara y el número de la arista de la cara. Así el par (1,0) se interpreta como la arista 0 de la cara 1. Cada unión de dos aristas se especificará por dos pares de números, identificando las aristas que se unen. De esta forma, el atlas formado queda como siguiente:

$[(1,0) (2,0)]$	$[(1,1) (5,0)]$	$[(1,2) (4,0)]$	$[(1,3) (3,0)]$
$[(2,1) (3,3)]$	$[(2,2) (6,2)]$	$[(2,3) (5,1)]$	$[(3,1) (4,3)]$
$[(3,2) (6,3)]$	$[(4,1) (5,3)]$	$[(4,2) (6,0)]$	$[(5,2) (6,1)]$

tabla 1: representación matricial del atlas

Además de especificar qué aristas están unidas, se ha de decir cómo unir las. La figura 15 muestra dos formas diferentes de unir un par de aristas. La primera, mostrada a la izquierda, es la unión con *orientación conservadora*, y la segunda tiene *orientación inversora*. Para unir esas dos aristas hay que hacer coincidir los números de cada una de ellas. Si se hace mediante la orientación conservadora se obtiene un cilindro y una *cinta de Moebius* (más adelante explicaremos en qué consiste) con la orientación inversora.

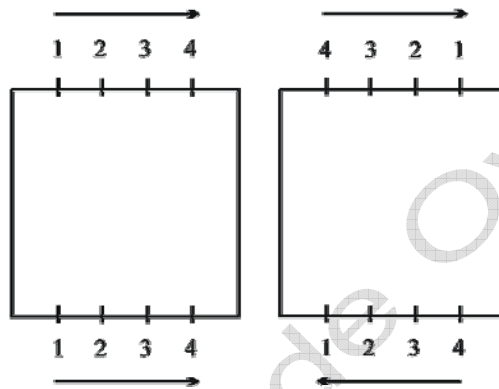


figura 15: orientaciones conservadora e inversora

Para especificar en el atlas de qué forma se van a unir las aristas, utilizamos la *paridad de transición* que es ± 1 , unida al par de aristas. La figura 16 presenta varios ejemplos de un esquema de notación que incluye el número de paridad de transición

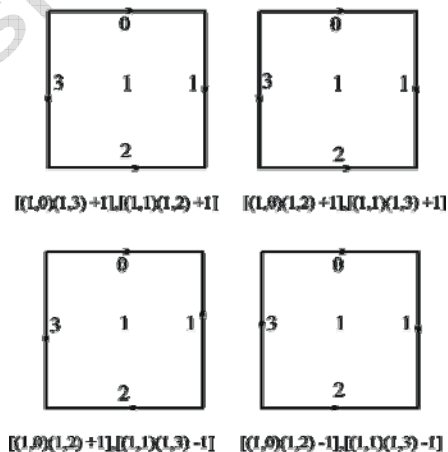


figura 16: atlas y paridad de transición de una esfera, un toro, una botella de Klein y un plano proyectivo

A) Superficies orientables y no orientables

Si utilizamos uniones no conservadoras en un atlas podemos conseguir algunas curiosidades matemáticas llamadas *superficies no orientables*, como la *cinta de Moebius* y la *botella de Klein* (figura 17). La cinta de Moebius po-

se ve una curiosa particularidad. Si se recorre la cinta comenzando en un punto cualquiera, y se da una vuelta completa, como se trata de una cinta bidimensional, cuando se llegue al punto de partida se observará que la derecha e izquierda están intercambiadas. Este tipo de superficies se llaman **no orientables** y se producen al efectuar uniones no conservadoras entre sus aristas. Por el contrario, si en la superficie nunca se intercambian la izquierda y derecha, entonces se dice que la superficie es **orientable**.

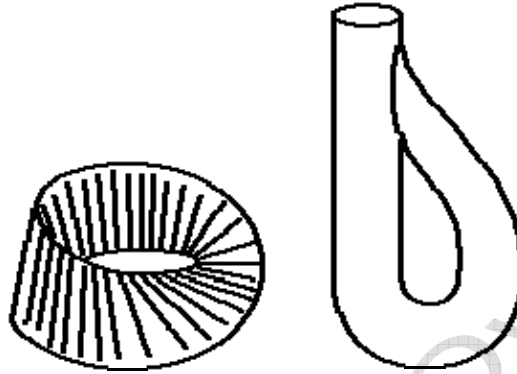


figura 17: cinta de Moebius y botella de Klein

Habíamos visto que para que cualquier superficie cerrada tridimensional sea consistente, debe ser topológicamente equivalente a una esfera con g asas. Ahora se añade otra condición más: *debe ser orientable*.

Si partimos de una cinta de Moebius y la cerramos aplicando una orientación conservadora, obtenemos otra superficie no orientable llamada botella de Klein, que no se puede construir en un espacio tridimensional sin que se auto interseque.

6.8 Objetos de Euler.

A los objetos cerrados tridimensionales de orden $g \geq 0$ que verifican ciertos requisitos de construcción, se les denomina *objetos de Euler*. Dichas normas son:

Todas sus caras (curvas o planas) han de ser discos topológicos.

Cada arista une sólo dos caras y todas finalizan en un vértice en cada extremo.

Por lo menos tres aristas se unen en un vértice.

En los objetos de Euler se cumple que:

Ec. 16

$$V - A + C = 2(S - P)$$

donde

S : número de superficies inconexas del objeto.

P : total de pasajes (túneles) en el objeto.

Como el número de pasajes en un objeto es igual al total de “asas” o agujeros que posea, ocurre que en la ecuación anterior P es igual al orden del objeto ($P = g$).

Para entender mejor el significado de S , la figura 18 muestra tres objetos eulerianos, con una, dos y tres superficies inconexas.

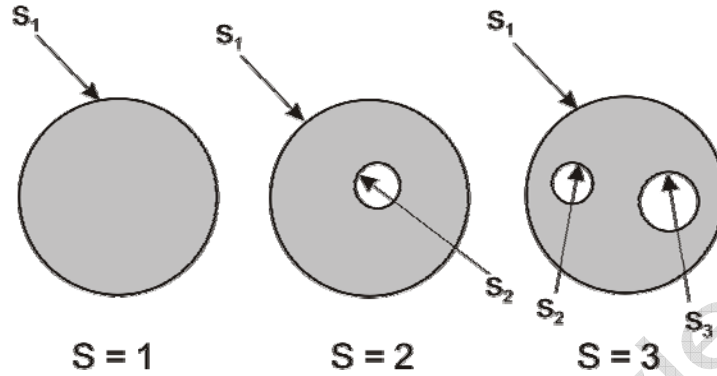
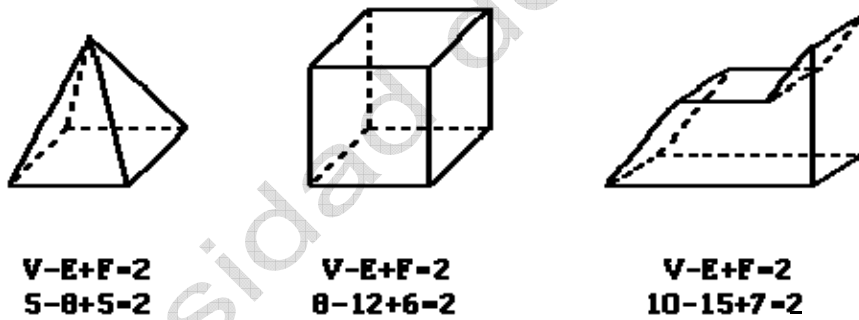


figura 18: objetos de Euler con diferentes valores de S

En la figura 19 se pueden ver algunos ejemplos de objetos eulerianos, cuando $S = 1$ y $P = 0$. Ver que en este caso la Ec. 16 se reduce a la ecuación de Euler.



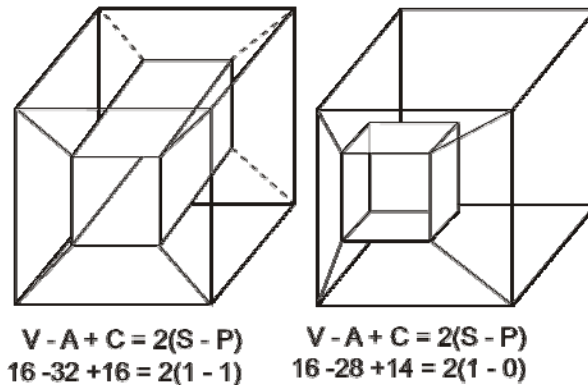
$$\begin{aligned} V-E+F &= 2 \\ 5-8+5 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V-E+F &= 2 \\ 8-12+6 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V-E+F &= 2 \\ 10-15+7 &= 2 \end{aligned}$$

figura 19: ejemplos de objetos de Euler

En la figura 20 hay otros dos objetos de Euler. El izquierdo es de grado 1, ya que tiene un túnel que lo cruza; el otro, aunque posee una cavidad, ésta no llega a atravesar el modelo. Por tanto, se trata de un objeto topológicamente equivalente a una esfera, es decir, de grado 0.



$$\begin{aligned} V-A+C &= 2(S-P) \\ 16-32+16 &= 2(1-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V-A+C &= 2(S-P) \\ 16-28+14 &= 2(1-0) \end{aligned}$$

figura 20: objetos eulerianos de grado 1 y 0, respectivamente

6.8.1 Operadores de Euler

Los **operadores de Euler** *permiten crear y transformar objetos de Euler, en nuevos objetos (también eulerianos) mediante la adición o eliminación de caras, aristas y vértice*. Dichos operadores son especialmente útiles en la creación y transformación de los modelos poliédricos, ya que directamente generan modelos íntegros, lo que evita (o minimiza) la verificación de la integridad de los modelos. Los operadores de Euler trabajan directamente sobre las estructuras de datos que definen los objetos. Por lo tanto, *un operador de Euler es un proceso que actúa sobre la base de datos donde está la información de los poliedros que ha de crear o transformar*.

Durante la transformación de un objeto de Euler en otro objeto de Euler, *inevitablemente se producen objetos intermedios que no son de Euler*. Por ejemplo, en la figura 21 podemos ver tres transformaciones realizadas con operadores de Euler. En el primer y segundo caso se han añadido las aristas y vértices suficientes para que los objetos resultantes sigan siendo de Euler. En el caso tercero, aunque cumple la ecuación de Euler, sin embargo, las aristas $(1,5)$ y $(2,5)$ no unen dos caras y, además, del vértice 5 no parten tres aristas, por lo que se trata de un objeto intermedio no euleriano. Éste puede convertirse en euleriano añadiendo dos nuevas aristas, la $(4,5)$ y la $(3,5)$.

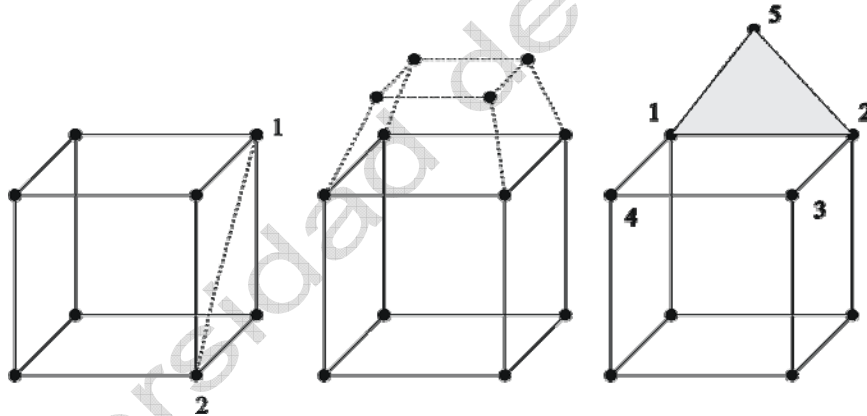


figura 21: operaciones de Euler sobre un cubo.

A base de añadir o eliminar aristas, vértices y caras, los operadores de Euler sólo pueden transformar los objetos de Euler en otros de la misma familia topológica. Si a partir de un objeto de grado g se pretende obtener otro de grado diferente, entonces no queda más remedio que agujerear alguna superficie (acordarse del proceso de pegado de asas) para poder construir un nuevo pasaje.

Por lo tanto, para poder cambiar el grado de los objetos, *los operadores de Euler incorporan la posibilidad de añadir o eliminar agujeros a los discos topológicos que configuran los objetos de Euler*. Al agregar un agujero en una cara, se crea un objeto intermedio³ donde se cumple que:

³ Recordar que los objetos de Euler han de estar contruidos mediante discos topológicos que, por definición, no pueden tener agujeros en su interior. Por lo tanto, si las caras tienen orificios, el poliedro en cuestión no puede ser un objeto de Euler.

$$V - A + C - O = 2(S - P)$$

“O” es el total de orificios (agujeros) en las caras. Ver que la ecuación de los objetos eulerianos es un caso particular de ésta, ya que entonces $O = 0$.

Los sumandos de la izquierda en la expresión $V - A + C = 2(S - P)$ pueden ser modificados directamente en la estructura de datos, mientras que los de la derecha (S y P) no. Esto significa que si, por ejemplo, se desea transformar un objeto de Euler de modo que el objeto final resultante haya cambiado de familia topológica (variado g), es posible conseguirlo añadiendo o eliminando vértices, aristas, caras y/o agujeros en las caras, de forma que al final se cumpla que $V' - A' + C' = 2(S' - P')$.

En el ejemplo de la figura 22, vemos un objeto no euleriano con un agujero en una cara y su transformación en uno de Euler. Ver que el hacer agujeros en las caras, no implica necesariamente que el objeto euleriano resultante sea de grado diferente al del objeto original.

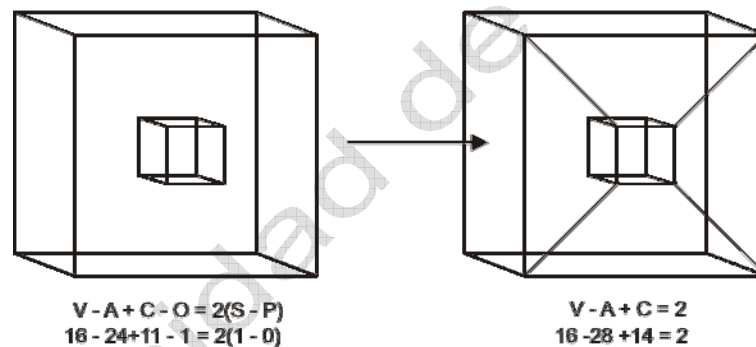


figura 22: transformación de un objeto no euleriano en otro de Euler

A) Elección de los operadores de Euler

Dado que interesa que los operadores de Euler sean capaces de cambiar el grado de los objetos, se utiliza la Ec. 17 para establecer los criterios de elección de los operadores de Euler.

Se ha demostrado que *no existe un conjunto de operadores de Euler que garantice la coherencia de los objetos intermedios*, es decir, que siempre se crearán objetos intermedios no eulerianos. Sin embargo, algunos operadores generan objetos intermedios más incoherentes que otros. Este hecho sirve como criterio de elección de los operadores de Euler. Así, *los operadores preferidos serán aquellos que generen objetos intermedios poco incoherentes*, es decir, que se desvíen lo mínimo posible de los objetos de Euler.

Braid, Hillyard y Stroud establecieron en 1978 un conjunto de 5 operadores básicos, con los cuales es posible efectuar cualquier transformación admisible. Estos operadores son:

- PAV. Poner una arista y un vértice.

- *PCA*. Poner una cara y una arista.
- *PSCV*. Poner una superficie, una cara y un vértice.
- *PPS*. Poner un pasaje y una superficie.
- *PA-EO*. Poner una arista y eliminar un agujero (orificio)

Estos operadores tienen otros 5 operadores complementarios, que en vez de añadir, eliminan elementos. Son:

- *EAV*. Eliminar una arista y un vértice.
- *ECA*. Eliminar una cara y una arista.
- *ESCV*. Eliminar una superficie, una cara y un vértice.
- *EPS*. Eliminar un pasaje y una superficie.
- *EA-PO*. Eliminar una arista y poner un agujero (orificio)

Los operadores anteriores poseen la propiedad de mantener balanceada la

Ec. 17, es decir, la adición o eliminación de uno o varios elementos a un lado de la ecuación queda contrarrestada añadiendo o quitando los elementos necesarios en el otro lado. Por ejemplo, el operador *PSCV* añade un vértice (+1) y una cara (+1) en el lado izquierdo de la

Ec. 17, y esto lo contrarresta añadiendo una superficie, que está en el otro lado de la ecuación, y tiene peso 2. Por lo tanto, como se añaden 2 por la izquierda y otros dos por la derecha, la

Ec. 17 permanece balanceada.

	V	A	C	O	2S	2P
	1	-1	1	-1	2	-2
PAV	1	1	0	0	0	0
PCA	0	1	1	0	0	0
PSCV	1	0	1	0	1	0
PPS	0	0	0	0	1	1
PA-EO	0	1	0	-1	0	0
EAV	-1	-1	0	0	0	0
ECA	0	-1	-1	0	0	0
ESCV	-1	0	-1	0	-1	0
EPS	0	0	0	0	-1	-1
EA-PO	0	-1	0	1	0	0

tabla 2: balance de los diferentes operadores de Euler

De igual modo, el operador *PCA* añade una cara (+1), que se contrarresta añadiendo una arista que, aunque está en el mismo lado de la ecuación, tiene signo opuesto (-1). En la tabla 2 se muestra el balanceado con respecto a la

Ec. 17, de cada uno de los operadores de Euler vistos.

Veamos un ejemplo sobre una de las posibles secuencias de operadores de Euler para construir un tetraedro.

Siendo $V = 4$, $A = 6$, $C = 4$, $O = P = 0$, y $S = 1$, la siguiente secuencia de

operadores finaliza con la creación de un tetraedro:

	V	-A	+C	-O	2S	-2P
PSCV	1	0	1	0	1	0
PAV	1	1	0	0	0	0
PAV	1	1	0	0	0	0
PAV	1	1	0	0	0	0
PCA	0	1	1	0	0	0
PCA	0	1	1	0	0	0
PCA	0	1	1	0	0	0

tabla 3: secuencia de operadores de Euler para crear un tetraedro

Cada uno de los procesos anteriores queda reflejado en la siguiente figura:

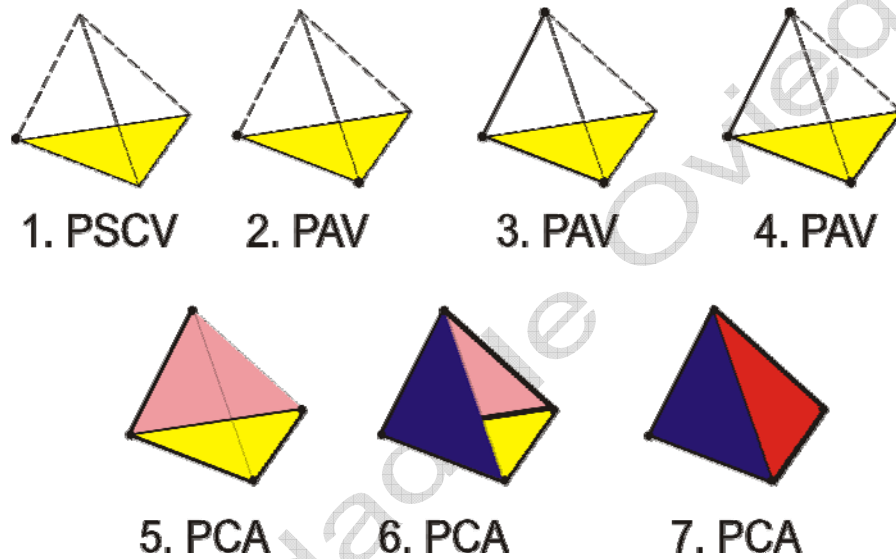


figura 23: construcción de un tetraedro mediante los operadores de Euler

Vemos en el ejemplo que la fórmula de Euler está equilibrada en todo momento, aunque no se obtiene un sólido válido hasta después de haber realizado la última operación. El primer operador (el PSCV) se encarga de inicializar la estructura de datos, y añade un vértice, una cara e incrementa el contador de superficies. Como argumentos requiere las coordenadas del vértice y los parámetros que describen la cara (no sus aristas).

6.9 Concepto generalizado de frontera

Si tenemos una región n-dimensional R^n en un espacio n-dimensional E^n , sus puntos pueden ser clasificados como: los que están dentro de la región y los que están en su límite o frontera. Por tanto, el conjunto de puntos de R^n estará formado por el subconjunto de puntos interior (iR), más el conjunto de los puntos de la frontera (fR).

Ec. 18

$$R = [iR, fR]$$

Según lo anterior, cualquier punto en el espacio E^n , tiene la siguiente

propiedad con respecto a R^n :

- Pertenecer al interior de R^n , es decir a iR .
- Pertenecer a la frontera de R^n , es decir a fR .
- No pertenecer a R^n .

En la figura 24, podemos ver un ejemplo de estos conjuntos.

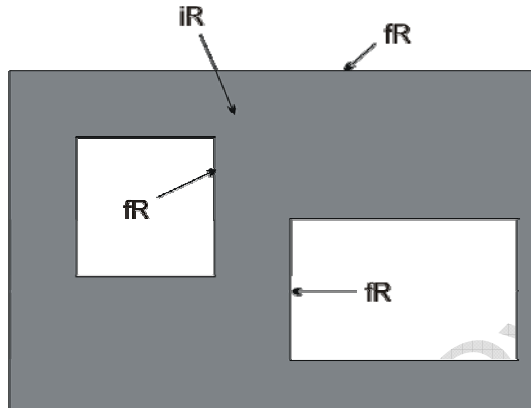


figura 24: objetos planos con sus puntos frontera e interiores

6.10 Operadores booleanos.

Como acabamos de ver, los objetos geométricos pueden considerarse como conjuntos de puntos, tanto de interior como de frontera. En Modelado Sólido, para construir objetos complejos se utilizan operaciones entre conjuntos, tales como unión (\cup), intersección (\cap) y diferencia ($-$). A estos operadores se les conoce en modelado como *operadores Booleanos*.

A la hora de aplicar los operadores booleanos sobre objetos simples para formar modelos más complejos, es importante que los modelos obtenidos sean íntegros (topológicamente válidos), y que además sean *dimensionalmente homogéneos*, es decir, que su dimensión sea igual a la de los objetos que se combinan. La figura 25 muestra dos ejemplos donde se pierde la homogeneidad dimensional, después de efectuar la intersección entre objetos válidos de 2 y 3 dimensiones.

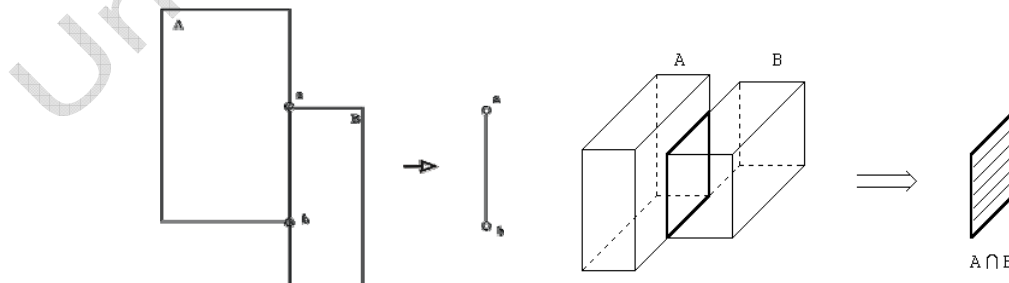


figura 25: Intersección que presenta un resultado degenerado

6.10.1 Operadores booleanos regularizados

Para evitar los resultados degenerados se utiliza el conjunto de los **operadores regularizados**, que preservan la homogeneidad dimensional. Los

operadores regularizados se denotan por \cup^* , \cap^* y $-^*$.

La figura 26 muestra un ejemplo sobre los resultados que se obtienen al aplicar operadores booleanos no regularizados y regularizados.

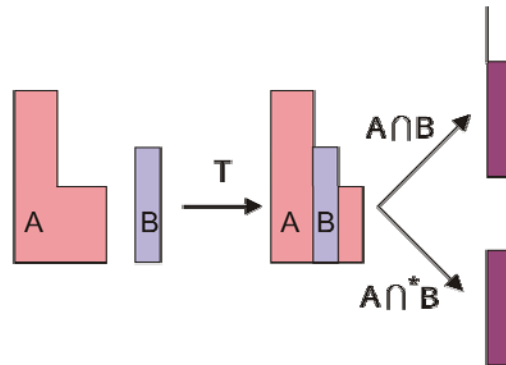


figura 26: operador booleano de intersección no regularizado (\cap) y el regularizado (\cap^*)

Dados los objetos bidimensionales A y B de la figura 26, si realizamos la intersección no regularizada (\cap) con dichos objetos, se obtiene un objeto que no es dimensionalmente homogéneo en su totalidad, pues contiene una "arista colgante". El resultado deseado se obtiene mediante la intersección regularizada (\cap^*) de A y B.

A) Intersección regularizada (\cap^*)

Como hemos visto en el apartado 6.9, los objetos A y B se pueden representar como la unión de los subconjuntos de frontera e interior. Así:

$$A = iA \cup fA \text{ y } B = iB \cup fB$$

Ec. 19

Por tanto, es posible expresar la intersección no regularizada de A y B como:

$$C = A \cap B = (iA \cup fA) \cap (iB \cup fB)$$

Ec. 20

Aplicando la propiedad distributiva queda:

$$C = (iA \cap iB) \cup (iA \cap fB) \cup (fA \cap iB) \cup (fA \cap fB)$$

Ec. 21

En la figura 27 podemos ver la representación gráfica de cada uno de los términos de la expresión anterior.

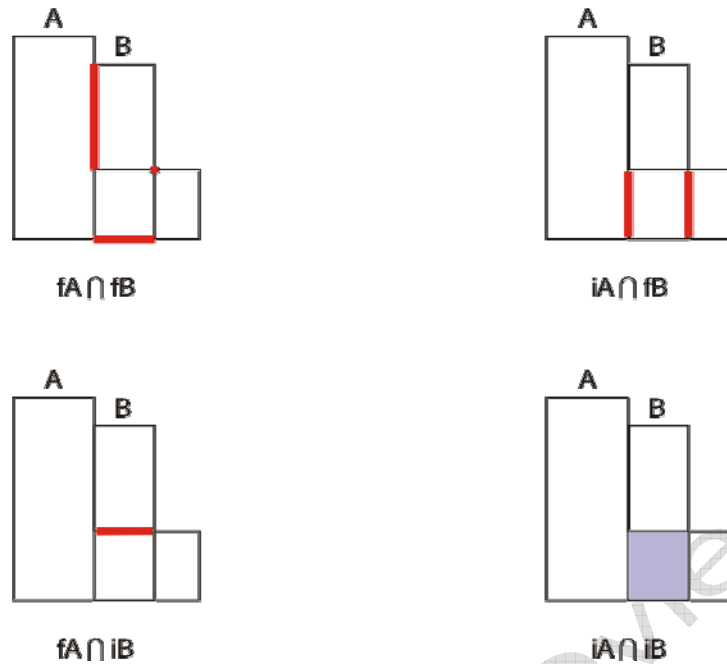


figura 27: subconjuntos de puntos al efectuar $A \cap B$

En principio, cada uno de los términos de la Ec. 21 es candidato para formar parte del resultado regularizado (homogéneo dimensional), al que llamaremos C^* .

Dado que C^* se trata de un conjunto de puntos, de nuevo se tiene que:

Ec. 22

$$C^* = iC^* \cup fC^*$$

En la figura 27 se puede ver que $iC = iC^* = iA \cap iB$. Queda entonces por determinar fC^* , que será igual a la parte válida de $(fA \cup fB)$.

Ver que las fronteras de los nuevos elementos siempre consistirán en segmentos de fronteras de los elementos que se combinan. Se puede generalizar esta observación diciendo: *los puntos de frontera pueden llegar a ser puntos de interior, mientras que los puntos de interior nunca pueden llegar a ser puntos de frontera.*

Además, en las intersecciones regularizadas, aunque no se incluya la demostración, ocurre que:

Ec. 23

$$iA \cap fB \subset fC^*$$

$$fA \cap iB \subset fC^*$$

Por tanto, tres de los términos de la Ec. 21 son validos para formar fC^* .

Sólo queda por analizar el candidato $(fA \cap fB)$. Éste término es el único que puede dar problemas de homogeneidad dimensional, ya que pueden surgir subconjuntos de dimensión menor.

Entre los conjuntos de puntos que se forman al hacer $(fA \cap fB)$ (figura

27, superior izq.), el punto aislado es un candidato válido de C^* ya que siempre será un vértice o cruce entre dos fronteras.

En cuanto a los restantes subconjuntos (segmentos en el ejemplo), para determinar cuáles pertenecen a fC^* , se aplica una *prueba de pertenencia* como la siguiente:

- 1) Se establece para los dos objetos A y B un mismo sentido de giro, p. e., el sentido de giro contrario al de las agujas del reloj.
- 2) Para cada segmento de $(fA \cap fB)$ se elige un punto " P_0 " del segmento.
- 3) Se traza un vector partiendo de P_0 , en el sentido de giro de A, y otro en el sentido de giro de B.
- 4) Si los vectores tienen sentidos opuestos, el segmento no es válido. En caso contrario el segmento pertenece a fC^* .

La figura 28 muestra gráficamente el test anterior

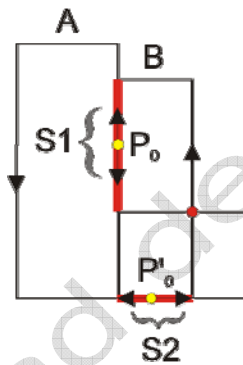


figura 28: test de validación de un conjunto de puntos de frontera

Aplicando esta prueba de validez, el segmento S1 queda eliminado de fC^* , mientras que S2 queda admitido.

Resumiendo, hemos visto que haciendo

Ec. 24

$$C^* = (A \cap^* B) = \text{válidos}(iA \cap iB) \cup (iA \cap fB) \cup (fA \cap iB) \cup (fA \cap fB)$$

se obtiene la intersección regularizada de los objetos A y B, que mantiene la homogeneidad dimensional, respecto de A y B.

Para desarrollar los operadores booleanos restantes se procede de modo similar, es decir, se dividen los objetos de partida en subconjuntos interior y frontera y se realiza la operación booleana entre dichos subconjuntos, produciéndose candidatos para formar parte de C^* (ver [Mort85], pgs. 408-413).

6.11 Clasificación de los elementos de un conjunto.

Como acabamos de ver, para regularizar los resultados booleanos es preciso determinar si los puntos se encuentran en el interior, la frontera o fuera de los conjuntos resultantes.

Se entiende por *clasificación de los elementos de un conjunto*, a la inclusión de los miembros de ese conjunto en uno de estos subconjuntos:

- *Conjunto de los puntos interiores (iA).*
- *Conjunto de los puntos de la frontera (fA).*
- *Conjunto de los puntos externos (cA).*

Además de la regularización de los resultados, en Modelado Sólido es interesante realizar una clasificación de los elementos de un conjunto, para determinar las relaciones de inclusión entre los elementos geométricos, como por ejemplo:

- dados un sólido y un punto, determinar si el punto está dentro, fuera o en la frontera del sólido.
- dados un polígono y una línea, determinar qué parte de la línea está dentro, qué parte fuera, y qué parte está en la frontera del polígono.
- dados dos sólidos, determinar cuándo se tocan (problema típico de animación).
- dados dos polígonos, determinar cuál es su intersección.

6.11.1 Criterios de clasificación en espacios n -dimensionales

Para estudiar este tipo de problemas se establecen unos criterios de clasificación generales, organizados según la dimensión del espacio donde se definen.

En $E0$ la relación básica es entre dos puntos. Éstos pueden coincidir o pueden ser distintos; en este segundo caso, pueden estar lejos o cerca.

En $E1$, dada una curva, hay varias clasificaciones posibles. Un punto puede ser el punto inicial, el punto final, o un punto intermedio de la curva. En una línea recta pueden darse otras dos clasificaciones: un punto puede estar delante o detrás de la línea, en la misma dirección. Por último, otras clasificaciones posibles son: un punto puede estar a la derecha de la línea o a su izquierda.

En $E2$, si se trata de un disco topológico, se puede averiguar si un punto está dentro, fuera o en la frontera del disco topológico.

Finalmente, en $E3$, dado un sólido, un punto puede estar dentro, en la superficie o fuera. Si el sólido es un poliedro, y si el punto está en la superficie, podría encontrarse en una cara, en una arista o en un vértice.

Estas son, más o menos, las posibles clasificaciones que pueden hacerse de los elementos de $E0$, con respecto a $E1$, $E2$ y $E3$.

En modelado, tan importante como la clasificación de los puntos es la clasificación de los elementos de $E1$ (líneas y curvas) en $E1$, $E2$ y $E3$. Es muy común el tener que averiguar la intersección entre líneas, la intersección y recorte (clipping) entre líneas y polígonos y la intersección entre líneas y sólidos (p. e. en ray tracing).

No menos importante es la clasificación entre los elementos de $E2$ (planos, polígonos y superficies curvas) en $E2$ y $E3$, es decir, localizar las intersecciones de superficies (que como veremos será muy importante a la

hora de frontierizar los modelos booleanos) y los cortes entre planos y/o superficies y los sólidos.

Finalmente, la clasificación de los elementos de $E3$ con los de $E3$ también es importante, especialmente en animación y modelado, para la detección de colisiones entre los objetos y la composición de modelos complejos, a partir de otros más simples.

Universidad de Oviedo