Algorítmica y Lenguajes de Programación

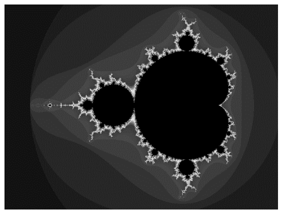
MATLAB (iv)

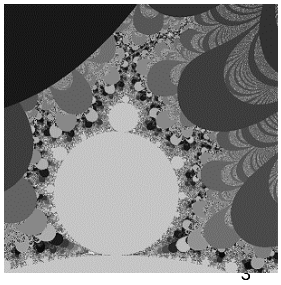
Fractales y MATLAB. Introducción

- A lo largo de las lecciones anteriores hemos visto los fundamentos de MATLAB.
- Esta herramienta resulta extraordinariamente útil en múltiples campos de la matemática, pero también para:
  - representar de sistemas físicos,
  - procesar señales digitales como sonido o imagen,
  - realizar análisis estadísticos,
  - procesar datos médicos y biológicos,
  - ...
- En esta lección iniciaremos al alumno en el estudio de los fractales mediante MATLAB.

Fractales y MATLAB. ¿Qué son los fractales?

- Un fractal es una forma geométrica que presenta “simetría de escala”. Es decir, si se aumenta cualquier zona de la misma un número cualquiera de veces seguirá pareciendo la misma figura.
- Los fractales son generados de forma matemática utilizando ordenadores y permiten crear imágenes de montañas, plantas, olas, etc.
- En la imagen se muestra el conjunto de Mandelbrot. Este conjunto es creado a partir de una función de la forma $z_{n+1}=f(z_n)$ utilizada para generar una serie de una variable compleja.
- En el caso del conjunto de Mandelbrot la función es $f(z_n) = z_n^2 + z_0$.

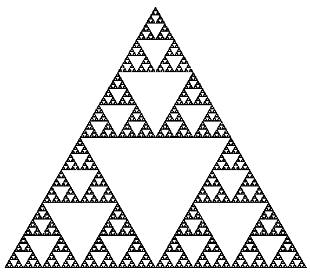




3

Fractales y MATLAB. Creación de fractales

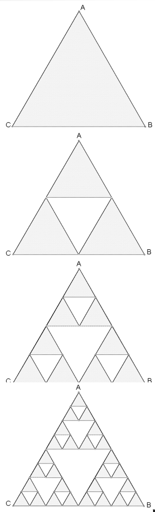
- Los fractales pueden generarse empleando números reales o complejos.
- El conjunto de Mandelbrot es un fractal creado mediante la utilización de números complejos.
- Un ejemplo sencillo de un fractal creado mediante números reales es el triángulo de Sierpinski.



4

Fractales y MATLAB. Triángulo de Sierpinski (i)

- Dibújese un triángulo equilátero ABC.
- Hállense los puntos medios de cada lado y conéctense para formar tres nuevas líneas dentro del triángulo original.
- Repetir para cada uno de los triángulos resultantes que estén "cabeza arriba".



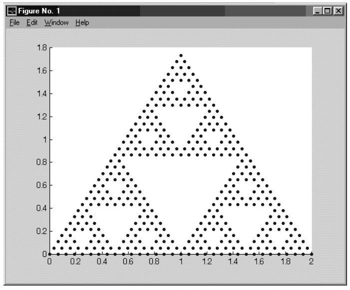
Fractales y MATLAB. Triángulo de Sierpinski (ii)

- A continuación se muestra un script MATLAB para generar un triángulo de Sierpinski.

```
function sierpinski (a,b,c,nivel)
hold on;
plot(a(1),a(2),'.');
plot(b(1),b(2),'.');
plot(c(1),c(2),'.');

if nivel>0
   p1=[(a(1)+c(1))/2 (a(2)+c(2))/2];
   p2=[(a(1)+b(1))/2 (a(2)+b(2))/2];
   p3=[(c(1)+b(1))/2 (c(2)+b(2))/2];

   sierpinski(a,p2,p1,nivel-1);
   sierpinski(p1,p3,c,nivel-1);
   sierpinski(p2,b,p3,nivel-1);
end
```



6

Fractales y MATLAB. Conjunto de Mandelbrot (i)

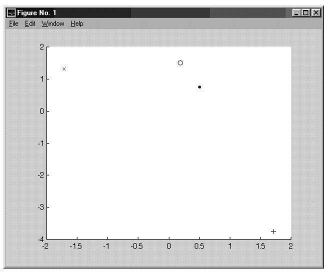
- El conjunto de Mandelbrot fue descubierto por Benoit Mandelbrot en 1980 mientras estudiaba el conjunto de Julia.
- El conjunto de Julia fue descubierto en los años 20 del siglo pasado por el matemático francés Gaston Julia.
- Julia se dedicó a analizar la función $f_c(z)=z_2+c$ para distintos números complejos c y, para un número c fijo, con distintos valores de z.
- Sólo con la llegada de los ordenadores se pudieron visualizar estos conjuntos y apreciar sus especiales características.

7

Fractales y MATLAB. Conjunto de Mandelbrot (ii)

- ¿Cómo se crea el conjunto de Mandelbrot? Veamos la forma inicial con el siguiente script MATLAB:

```
hold on;
z0 = 0.5 + 0.75i
plot (z0,'.');
z1 = z0^2 + z0;
plot (z1,'o');
z2 = z0^1 + z0;
plot (z2,'x');
z3 = z2^2 + z0;
plot (z3,'+');
```



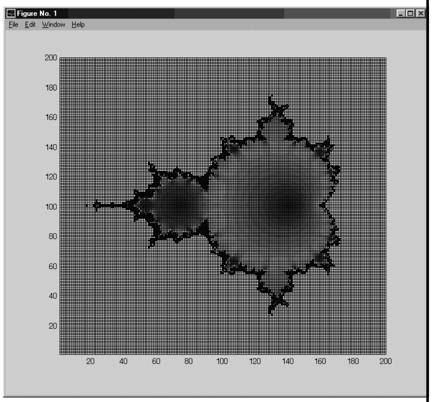
- El punto z3 está muy alejado de los otros; por ello, z0 no es una buena "elección" para pertenecer al conjunto de Mandelbrot puesto que se "aleja" después de sólo 3 iteraciones.
- El conjunto de Mandelbrot está formado por aquellos puntos que se mantienen "próximos" después de N iteraciones. El conjunto así definido encaja dentro del rectángulo: -2,1<x<0,9 y -1,5<y<1,5.

8

Fractales y MATLAB. Conjunto de Mandelbrot (iii)

- Script MATLAB para representar el conjunto de Mandelbrot:

```
puntos=200;
puntosx=linspace(-2.1,0.9,puntos);
puntosy=linspace(-1.5,1.5,puntos);
[X,Y]=meshgrid(puntosx,puntosy);
C=X+Y*i;
Z=zeros(puntos);
iteraciones=20;
for k=1:iteraciones
   Z=Z.^2+C;
   W=exp(-abs(Z));
end
pcolor(W);
```

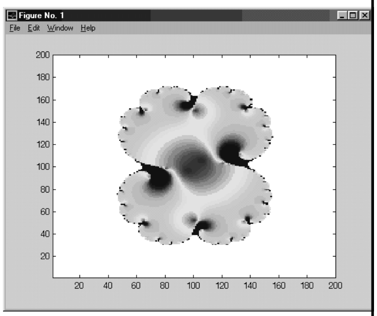


Fractales y MATLAB. Conjunto de Mandelbrot (iv)

- Algunos comentarios sobre el script anterior:
  - El comando **`linspace`** permite generar vectores con un número determinado de elementos equiespaciados. Así, **`linspace(0,1,5)`** genera el vector **`[0.00 0.25 0.50 0.75 1.00]`**.
  - El comando **`meshgrid`** recibe dos vectores y retorna el producto cartesiano de los mismos.
  - El comando **`zeros`** retorna un vector que sólo contiene ceros.
  - El comando **`abs`** retorna el módulo de un número complejo.
  - El comando **`pcolor`** representa los valores almacenados en una matriz como un código de color.

Fractales y MATLAB. Conjunto de Julia (i)

- El conjunto de Julia es $f_c(z)=z^2+c$. Para construir este conjunto se fija un valor para c y se estudia lo que sucede con cada punto tras n iteraciones.
- En la figura se muestra el conjunto de Julia para un valor de c = 0,27334 - 0.00742i
- Recordemos que Mandelbrot descubrió el conjunto que lleva su nombre estudiando el conjunto de Julia; así, resulta muy sencillo modificar el código MATLAB anterior para visualizar este otro conjunto fractal.



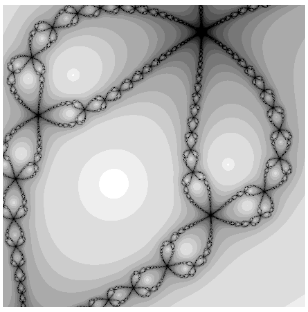
Fractales y MATLAB. Conjunto de Julia (ii)

- Script MATLAB para visualizar el conjunto de Julia anterior:

```
puntos=200;
puntosx=linspace(-2.1,0.9,puntos);
puntosy=linspace(-1.5,1.5,puntos);
[X,Y]=meshgrid(puntosx,puntosy);
c=0.27334-0.00742*i;
Z=X+Y*i;
iteraciones=20;
for k=1:iteraciones
   Z=Z.^2+c;
   W=exp(-abs(Z));
end
pcolor(W);
shading flat;
```

Fractales y MATLAB. Newton Raphson

- Esta técnica se basa en el método de Newton Raphson para encontrar las raíces de una ecuación polinomial de la forma: $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_mz^m=0$.
- El método genera una serie cuya aproximación a la solución n+1 viene dada por $z_{n+1}=z_n-f(z_n)/f'(z_n)$.
- Para crear una imagen mediante esta técnica se utiliza cada punto del plano como aproximación inicial, z0, y se colorea en función de si hay o no solución y la velocidad con que esta se encuentra.
- Se propone como ejercicio para el alumno la implementación de un script MATLAB que visualice este fractal.



13

Fractales y MATLAB. Resumen

- Un fractal es una forma geométrica que presenta "simetría de escala". Es decir, si se aumenta cualquier zona de la misma un número cualquiera de veces seguirá pareciendo la misma figura.
- Los fractales son generados de forma matemática utilizando ordenadores y permiten crear imágenes de montañas, plantas, olas, etc.
- Los fractales pueden generarse empleando números reales o complejos.
- Algunos ejemplos clásicos de fractales son el triángulo de Sierpinski, el conjunto de Julia o el conjunto de Mandelbrot.
- MATLAB permite implementar de forma muy sencilla algoritmos para la visualización de fractales.

14