Ejercicios de Lógica de Predicados

28/01/2002

Índice General

1 Enunciados

Enunciado 1 *Formalizar las siguientes frases:*

1. Juan afeita a los que no se afeitan a sí mismos
2. Existe un estudiante que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos
3. Hay estudiantes que no afeitan a nadie, pero Juan se afeita a sí mismo
4. Todos los estudiantes afeitan a Juan sólo si Juan no se afeita a sí mismo
5. Los estudiantes no afeitan a Juan a menos que Juan sea estudiante

Enunciado 2 *Demostrar mediante deducción natural*
$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(R(x) \to Q(x)), \forall x(P(x) \vee R(x))\} \Rightarrow \forall x Q(x)$

Enunciado 3 *Demostrar mediante deducción natural*
$\{\exists x(P(x)\} \Rightarrow \neg\forall x \neg P(x)$

Enunciado 4 *Demostrar por deducción natural*
$\{\forall x(\neg(\neg Q(x) \vee \neg R(x))), \exists x(P(x) \to \neg R(x)), \exists x(\neg R(x) \vee S(x))\} \Rightarrow \exists x S(x)$

Enunciado 5 *Demostrar por deducción natural*
$\{\forall x \forall y(\neg(R(x) \to \neg S(x,y))), \forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y)), \exists x \forall y(R(x) \wedge Q(x,y) \to \neg S(x,y))\} \Rightarrow \exists x \neg P(x)$

Enunciado 6 *Formalizar y demostrar la corrección del siguiente razonamiento mediante deducción natural.* Quien a buen árbol se arrima, buena sombra le cobija. Juan se arrima a un buen árbol. Por tanto, existen buenas sombras

Enunciado 7 *Construir los siguientes predicados que utilizan aritmética pura en Prolog*

1. `suma(X,Y,Z)` *se cumple si* `Z` *es la suma de* `X` *e* `Y`
2. `prod(X,Y,Z)` *se cumple si* `Z` *es el producto de* `X` *e* `Y`
3. `pot(X,Y,Z)` *se cumple si* `Z` *es el resultado de elevar* `X` *a* `Y`
4. `fact(X,Y)` *se cumple si* `Y` *es el factorial de* `X`
5. `mayor(X,Y,Z)` *se cumple si* `Z` *es el mayor de* `X` *e* `Y`
6. `mcd(X,Y,Z)` *se cumple si* `Z` *es el máximo común divisor de* `X` *e* `Y` *(utilizar el algoritmo de Euclides)*

Enunciado 8 *Construir los siguientes predicados en Prolog*

1. `junta(L1,L2,L3)` *se cumple si* `L3` *es la lista resultante de juntar* `L1` *y* `L2`
2. `ultimo(L,X)` *se cumple si* `X` *es el último elemento de la lista* `L` *(definirlo de forma recursiva y utilizando el predicado* `junta`
3. `seguidos(X,Y,L)` *se cumple si* `X` *e* `Y` *aparecen seguidos en la lista* `L`

2 Soluciones

Solución 1

1. $\forall x(\neg A(x,x) \to A(j,x))$
2. $\exists x(E(x) \wedge \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
3. $\exists x(E(x) \wedge \neg\exists y A(x,y)) \wedge A(j,j)$
4. $(\forall x(E(x) \to A(x,j)))) \to \neg A(j,j)$
5. $(\forall x(E(x) \to A(x,j))) \to E(j)$

Solución 2

1. $\forall x(P(x) \to Q(x))$	*Premisa*
2. $\forall x(R(x) \to Q(x))$	*Premisa*
3. $\forall x(P(x) \vee R(x))$	*Premisa*
4. (a)	$Var.libre$
5. $P(a) \to Q(a)$	$\forall E1$
6. $R(a) \to Q(a)$	$\forall E2$
7. $P(a) \vee R(a)$	$\forall E3$
8. $Q(a)$	$\vee E5,6,7$
9. $\forall x Q(x)$	$\forall I4-8$

Solución 3

1. $\exists x(P(x)$	*Premisa*
2. $(a)P(a)$	*Supuesto*
3. $\forall x \neg P(x)$	*Supuesto*
4. $\neg P(a)$	$\forall E3$
5. $P(a) \wedge \neg P(a)$	$\wedge I2,4$
6. $\neg\forall x \neg P(x)$	$\neg I3-5$
7. $\neg\forall x \neg P(x)$	$\exists E1,2-6$

Solución 4

1. $\forall x(\neg(\neg Q(x) \lor \neg R(x)))$	*Premisa*
2. $\exists x(P(x) \to \neg R(x))$	*Premisa*
3. $\exists x(\neg R(x) \lor S(x))$	*Premisa*
4. $(y)\neg R/y) \lor S(y)$	*Supuesto*
5. $\neg R(y)$	*Supuesto*
6. $\neg Q(y) \lor \neg R(y)$	$\lor I5$
7. $\neg(\neg Q(y) \lor \neg R(y))$	$\forall E1$
8. $\neg Q(y) \lor \neg R(y) \land \neg(\neg Q(y) \lor \neg R(y))$	$\land I6, 7$
9. $\mathbb{F}$	$\mathbb{F}I8$
10. $S(y)$	$\mathbb{F}E9$
11. $\neg R(y) \to S(y)$	$\to I5-9$
12. $S(y)$	*Supuesto*
13. $S(y) \to S(y)$	$\to I12$
14. $S(y)$	$\lor E4, 11, 13$
15. $\exists x S(x)$	$\exists I14$
16. $\exists x S(x)$	$\exists E3, 4-16$

Solución 5

1. $\forall x \forall y(\neg(R(x) \to \neg S(x,y)))$	*Premisa*
2. $\forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y))$	*Premisa*
3. $\exists x \forall y(R(x) \land Q(x,y) \to \neg S(x,y))$	*Premisa*
4. $(z)\forall y(R(z) \land Q(z,y) \to \neg S(z,y))$	*Supuesto*
5. $\exists y(P(z) \to Q(z,y))$	$\forall E2$
6. $(t)P(z) \to Q(z,t)$	*Supuesto*
7. $R(z) \land Q(z,t) \to \neg S(z,t)$	$\forall E4$
8. $\forall y(\neg R(z) \to \neg S(z,y))$	$\forall E1$
9. $\neg(R(z) \to \neg S(z,t))$	$\forall E8$
10. $P(z)$	*Supuesto*
11. $Q(z,t)$	$\to E6$
12. $R(z)$	*Supuesto*
13. $Q(z,t) \land R(z)$	$\land I11, 12$
14. $\neg S(z,t)$	$\to E7, 13$
15. $R(z) \to \neg S(z,t)$	$\to I12-14$
16. $(R(z) \to \neg S(z,t)) \land \neg(R(z) \to \neg S(z,t))$	$\land I9, 15$
17. $\neg P(z)$	$\neg I10-16$
18. $\exists x \neg P(x)$	$\exists I17$
19. $\exists x \neg P(x)$	$\exists E5, 6-18$
20. $\exists x \neg P(x)$	$\exists E3, 4-19$

Solución 6

1. $\forall x(\exists y(B(y) \wedge A(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(B(y) \wedge S(y) \wedge C(y,x)))$ *P.*
2. $\exists x(B(x) \wedge A(x) \wedge R(j,x))$ *Premisa*

3. $(z)R(j,z) \wedge B(z) \wedge A(z)$	*Supuesto*
4. $\exists y(B(y) \wedge A(y) \wedge R(j,y)) \rightarrow \exists y(B(y) \wedge S(y) \wedge C(y,j))$	$\forall E1$
5. $\exists y(B(y) \wedge A(y) \wedge R(j,y))$	$\exists I3$
6. $\exists y(B(y) \wedge S(y) \wedge C(y,j))$	$\rightarrow E4,5$
7. $(t)B(t) \wedge S(t) \wedge C(t,j)$	*Supuesto*
8. $B(t)$	$\wedge E7$
9. $S(t)$	$\wedge E7$
10. $B(t) \wedge S(t)$	$\wedge I8,9$
11. $\exists x(B(x) \wedge S(x))$	$\exists I10$
12. $\exists x(B(x) \wedge S(x))$	$\exists E6, 7-11$

13. $\exists x(B(x) \wedge S(x))$ $\exists E2, 3-12$

Solución 7

```
suma(0,Y,Y).
suma(s(X),Y,s(Z)):-suma(X,Y,Z).

prod(0,Y,0).
prod(s(X),Y,Z):-prod(X,Y,P),suma(P,Y,Z).

pot(X,0,s(0)).
pot(X,s(Y),Z):-pot(X,Y,P),prod(P,X,Z).

fact(0,s(0)).
fact(s(X),Y):-fact(X,F),prod(s(X),F,Y).

mayor(s(X),0).
mayor(s(X),s(Y)):-mayor(X,Y).

mcd(X,X,X).
mcd(X,Y,M):-mayor(X,Y),suma(R,Y,X),mcd(R,Y,M).
mcd(X,Y,M):-mayor(Y,X),suma(R,X,Y),mcd(R,X,M).
```

Solución 8

```
junta([],L,L).
junta([X|L],M,[X|N]):-junta(L,M,N).

/* De forma recursiva */
ultimo([X],X).
ultimo([Y|L],X):-ultimo(L,X).
```

```
/* usando el predicado "junta" */
ultimo(L,X):-junta(M,[X],L).

seguidos(X,Y,L):-junta(M,[X,Y|N],L).
```